

# COUPLAGE A L'AIDE DU TRANSPORT OPTIMAL DANS LE CADRE DES ORDRES STOCHASTIQUES

DIRECTEUR DE THESE : AUGUSTIN FRUCHARD ET NICOLAS JUILLET  
IRIMAS – 18 RUE DES FRERES LUMIERE, 68 093 MULHOUSE  
TÉL : 03 89 33 66 37 / E-MAIL : [AUGUSTIN.FRUCHARD@UHA.FR](mailto:AUGUSTIN.FRUCHARD@UHA.FR)  
TÉL : 03 89 33 64 26 / E-MAIL : [NICOLAS.JUILLET@UHA.FR](mailto:NICOLAS.JUILLET@UHA.FR)  
WEBSITE (EN): [HTTPS://JUILLET.PERSO.MATH.CNRS.FR](https://juillet.perso.math.cnrs.fr)

La construction de processus stochastiques ou plus généralement de variables aléatoires définies sur un même espace est une thématique fondamentale des probabilités qui a traversé les périodes et les domaines des probabilités pour resurgir régulièrement dans des contextes différents. On la retrouve spécifiquement dans certains problèmes classiques tels que celui des faux mouvements browniens (les « fake Brownian Motions ») ou dans celui des plongements de Skorokhod pour lesquels des solutions variées dans leur conception et leurs méthodes existent. On peut également citer le problème des peacocks (PCOC : Processus Croissant pour l'Ordre Convexe) qui étend celui du faux mouvement brownien.

Ces problèmes partagent pour objectif celui de construire des processus stochastiques satisfaisant certaines contraintes et interpolant exactement une famille de marges prescrites. A la gamme des approches les plus courantes (contrôle optimal stochastique, théorie du potentiel, couplage, etc.) est récemment venu s'ajouter un nouveau point de vue inspiré de la théorie du transport optimal. Il s'est notamment illustré dans l'article de Beiglböck, Cox et Huesmann [1]. Le champ des découvertes à venir reste vaste. On voudrait explorer de nouvelles contraintes pour ces problèmes, en particulier des contraintes liées aux ordres stochastiques, et, dans le meilleur des cas, d'obtenir une théorie englobante. Ainsi les extensions du théorème de Kellerer [4] et plus généralement la très délicate construction de processus markovien font partie des caps donnés à cette thèse. D'autres propriétés stochastiques telles que la propriété de représentation prévisible, dans la lignée de [2] ou la construction de martingales déterministes dans le sens rétrograde (en lien avec la notion de "backward Brenier map") constituent également des objectifs. Enfin, dans un cadre plus géométrique, on envisagera le problème des plongements höldériens de l'espace de Wasserstein dans des espaces  $L^p$  via la construction de variables aléatoires associées [3].

Lors de la première année de la thèse, il s'agira dans de se familiariser avec les problèmes susmentionnés et de compléter son bagage théorique et technique en reproduisant certaines démonstrations. En deuxième partie de la première année on décidera de l'angle d'attaquer prioritaire. Il est attendu que les premiers résultats arrivent à maturation au cours de la deuxième année. L'effort d'apprentissage de la rédaction d'articles sera poursuivi dès la première année avec pour objectif la publication d'articles scientifiques originaux en troisième année. Cette dernière sera aussi consacrée à la rédaction du mémoire de thèse en parallèle de la continuation des recherches et la dissémination des résultats.

## REFERENCES

- [1] M. Beiglböck, A. Cox and M. Huesmann. Optimal transport and Skorokhod embedding *Invent. Math.* 2017, 208, 327-400.
- [2] M. Brücknerhof, M. Huesmann and N. Juillet, Shadow martingales – a stochastic mass transport approach to the peacock problem. *Elec. J. Probab.*, Paper No. 125, 2022.
- [3] A. Delalande and Q. Mérigot. Quantitative Stability of Optimal Transport Maps under Variations of the Target Measure. *Duke J. Math.* (to appear)
- [4] H. Kellerer, Markov-Komposition und eine Anwendung auf Martingale. *Math. Ann.* 198, 99-122 (1972).