Résumé de Thèse : Singularités algébriques et domaines symplectiques
IRMA

Thibault LORSCHEIDER

4 juillet 2022

L'objectif de cette thèse est d'explorer une relation entre les plongements symplectiques et les singularités algébriques planes observé dans [Bir01], [MP94] et [Ops14].

Du côté algébrique, le problème est le suivant :

Question 1. *Soit $\mathcal{S}$ une singularité algébrique plane. Quel est le degré minimal d'une courbe algébrique $C \subset \mathbb{C}P^2$ réalisant la singularité $\mathcal{S}$?*

Un exemple d'un tel problème est la conjecture de Nagata, énoncée en 1959. On dit qu'une courbe présente une singularité étoilée de multiplicité m en un point p si elle est localement difféomorphe à une union de m disques lisses deux à deux transverses.

Conjecture 2. *Soient $p_1, \cdots, p_K$, des points génériques dans $\mathbb{C}P^2$ et soient $m_1, \cdots, m_K$ des entiers strictement positifs. Pour $K > 9$, toute courbe $C \subset \mathbb{C}P^2$ présentant une singularité étoilée de multiplicité m_i en p_i vérifie*

$$\deg(C) > \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{i=1}^{K} m_i.$$

Du coté symplectique, le problème des plongements peut s'énoncer très généralement ainsi :

Question 3. *Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique, $U \subset \mathbb{C}^n$ un domaine. Calculer la valeur maximale λ pour laquelle λU se plonge symplectiquement dans M.*

Pour mettre cette question en perspective, rappelons qu'une variété M est dite symplectique si elle est munie d'une 2-forme différentielle fermée et non-dégénérée ω :

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega &= 0 \\ \omega \wedge \cdots \wedge \omega &= \omega^{\wedge n} \text{ est une forme volume.} \end{cases}$$

La non-dégénérescence implique que M est orientable de dimension paire. Les deux exemples de variétés symplectiques les plus pertinents pour notre discussion sont

- ($\mathbb{R}^{2n} \sim \mathbb{C}^n$, $\omega_{st} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i$),
- ($\mathbb{C}P^n, \omega_{FS}$), la forme ω_{FS} est appelée forme de Fubini-Study. Elle est normalisée de sorte que la droite projective $\mathbb{C}P^1 = L_\infty$ a aire 1. Les courbes algébrique de degré d sont symplectique et d'aire d.

Définition 4. *Un plongement $f : U \subset \mathbb{C}^n \hookrightarrow (M, \omega)$ est dit symplectique si il vérifie $f^*\omega = \omega_{st}$.*

Le théorème de Darboux assure que pour tout point p d'une variété symplectique, il existe un plongement symplectique $f : B(\varepsilon) \hookrightarrow (M, \omega)$ tel que $f(0) = p$ pour ε suffisamment petit. En particulier, si $U \subset \mathbb{C}^n$ est borné, il existe toujours des $\lambda > 0$ pour lesquels λU se plonge symplectiquement dans (M, ω). La question 2 fait donc sens.

Notons qu'un plongement symplectique $f : U \subset \mathbb{C}^n \hookrightarrow (M, \omega)$ vérifie $f^*\omega^{\wedge n} = (f^*\omega)^{\wedge n} = \omega_{st}^{\wedge n} = Vol_{\omega_{st}}$. Les difféomorphismes symplectiques préservent donc le volume, et il est aisé de voir que la condition $f^*\omega = \omega_{st}$ est strictement plus contraignante que la préservation du volume.

En 1985, M. Gromov met en évidence une différence quantitative importante entre les difféomorphismes préservant le volume et les symplectomorphismes, il existe un plongement $\varphi : B^{2n}(R) \hookrightarrow Z^{2n}(r) := D^2(r) \times \mathbb{C}^{n-1}$ préservant le volume, pour tout r, R, mais il faut que $r \geq R$ pour qu'un tel plongement symplectique existe. C'est le théorème de Non-Tassement de Gromov :

Théorème 5 (Non-squeezing [Gro85])**.** *Soit $(B^{2n}(r), \omega_{st})$ la boule symplectique standard et soit $(Z_R := B^2(R) \times \mathbb{R}^{2n-2}, \omega_{st})$ le cylindre symplectique standard. Si il existe un plongement symplectique $\varphi : B^{2n}(r) \hookrightarrow Z_R$, alors $R > r$.*

Suite au théorème 5, de nombreux travaux se sont concentrés sur l'existence ou non de plongements de boules de tailles maximales dans certaines variétés symplectiques.

Exemple 6. *Il existe un plongement de la boule $B^4(1)$ dans $\mathbb{C}P^2$ de volume total.*

En effet, $(\mathbb{C}P^2, \omega_{FS})$ est la réduction symplectique de $B^4(1)$ le long des courbes caractéristiques $\mathrm{Ker}(\omega_{st|\partial B^4(1)})$ du bord de $B^4(1)$ et l'image du bord par cette réduction symplectique est exactement la droite L_∞. En d'autres termes, $\mathbb{C}P^2 \backslash L_\infty$ est symplectomorphe à la boule ouverte $\overset{\circ}{B}{}^4(1)$.

Le même article de Gromov montre la pertinence de l'étude des plongements de plusieurs boules disjointes dans les variétés symplectiques. Cette question est connue sous le nom de *problème d'empilement* de boules. Il s'agit d'un cas particulier de la question 2 lorsque U est une union disjointe de boules.

Question 7. *Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$ et soit $U = \bigsqcup_{i=1}^{K} (B(a_i), \omega_{st})$ une réunion disjointe de K boules standards et de dimension $2n$.*

Pour quels a_i U se plonge-t'il symplectiquement dans (M, ω) ?

Dans le cas de $\mathbb{C}P^2$, les travaux de Gromov [Gro85], McDuff-Polterovich [MP94] et de Biran [Bir97] donnent une réponse complète a cette question lorsque toutes les boules ont même taille.

Théorème 8 ([MP94] & [Bir97])**.** *La solution du problème d'empilement de boules dans $(\mathbb{C}P^2, \omega_{FS})$ est données par :*

Nombre de boules	*2*	*3*	*4*	5	6	*7*	8	$K \geq 9$
taille maximale des boules	*1/2*	*1/2*	*1/2*	*2/5*	*2/5*	*3/8*	*6/17*	$1/\sqrt{K}$
Volume total de l'empilement	*1/2*	*3/4*	*1*	*20/25*	*24/25*	*63/64*	*288/289*	*1*

Dans les années 2000, Hutchings a défini des invariants pour les domaines de $\mathbb{C}^2$ qui donnent une liste d'obstructions aux problèmes de plongements. Dans [McD11], McDuff démontre finalement que ces invariants donnent une liste d'invariants totaux pour le problème d'empilement de boules dans $\mathbb{C}P^2$, apportant une réponse définitive à ce problème. Il est important dans cette discussion d'insister sur la calculabilité aisée de ces invariants pour les unions disjointes de boules. Le problème d'empilement de boule dans $\mathbb{C}P^2$ a ainsi reçu une réponse théorique, mais également complètement décidable. Finalement, McDuff et Choi & al ont expliqué comment les plongements de certains domaines particuliers, mais intéressants, se ramènent à des problèmes d'empilements, ouvrant la voie à l'étude des plongements de domaines plus généraux. Ces domaines particuliers sont appelés domaines toriques concaves, et contiennent en particulier les ellipsoides. [McD09, HR14]

Dans [Bir01], Biran exhibe un lien entre le problème d'empilement par des boules symplectiques de $\mathbb{C}P^2$ et la conjecture de Nagata. Plus précisément, il fait la remarque que la conjecture de Nagata est très similaire au problème d'empilement. On peut en effet réécrire le cas $K \geq 9$ du théorème 8 comme suit :

Corollaire 9. *Soit un réel $a > 0$ et $B(a)$ la boule symplectique standard de taille a. Si $K \geq 9$, la réunion disjointe des K boules $B(a)$ se plonge symplectiquement dans $\mathbb{C}P^2$ dès que $K\mathrm{Vol}(B(a)) \leq \mathrm{Vol}(\mathbb{C}P^2)$. Ce qui se réécrit $\sqrt{K}a \leq 1$.*

Pour voir explicitement le lien entre ces deux énoncés on a besoin du résultat suivant :

Théorème 10 (McDuff-Polterovich)**.** *Soient $C \subset \mathbb{C}P^2$ une courbe algébrique de degré d (ou symplectique d'aire d) avec K singularités étoilées à p branches, c'est-à-dire telle qu'au voisinage de chaque singularité, C est l'intersection de p droites vectorielles complexes. Si la résolution des singularités de C fournit une courbe $\widehat{C}$ dont la classe d'homologie est de carré positif, alors on peut plonger symplectiquement K boules $B(p/d)$ disjointes dans $(\mathbb{C}P^2, \omega_{FS})$.*

Le volume de cette union de boules est alors donnée par $K\mathrm{Vol}(B(p/d)) = Kp^2/d^2$. Or, celui-ci doit être inférieur au volume de $\mathbb{C}P^2$ qui est égal à 1. On obtient donc

$$Kp^2/d^2 \leq 1 \iff \sqrt{K}p \leq d$$

On retrouve ainsi l'inégalité de la conjecture de Nagata 2, qui admet donc une démonstration symplectique lorsque $[\widehat{C}]^2 \geq 0$.

Pour aller plus loin dans ces liens mis en évidence par McDuff-Polterovich et Biran, Opshtein s'est intéressé aux liens entres singularités cuspidales présentées par des courbes symplectiques dans $\mathbb{C}P^2$ et le plongement d'ellipsoides dans $\mathbb{C}P^2$ [Ops14]. On peut également noter que Michael Hutchings a construit des invariants symplectique qui empêchent ces plongements et donnent donc potentiellement des invariants symplectiques de ces singularités algébriques.

Dans cette thèse on se propose de considérer des singularités plus compliquées que les singularités étoilées. On cherche en particulier à comprendre quels domaines peuvent être associés à ces singularités.

Théorème 1. *Soit $\mathcal{S}$ une singularité algébrique en $(0,0) \in \mathbb{C}^2$. Il existe un domaine $\mathcal{D}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{C}^2$ dont les propriétés sont énoncées ci-après (proposition 2) tel que pour toute variété symplectique (M, ω) de dimension 4 de classe symplectique rationnelle ($[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Q})$) on a :*

1. *Si $C \subset M$ est une courbe symplectique Poincaré duale à $d[\omega]$ réalisant la singularité $\mathcal{S}$ et $\widehat{C}$ est sa résolution algébrique, alors $\alpha\mathcal{D}(\mathcal{S})$ se plonge symplectiquement dans M :*

(a) $\forall \alpha < 1/d$ *si* $[\widehat{C}]^2 \geq 0$.

(b) $\forall \alpha < \frac{\mathcal{A}_\omega(C)}{\left|[\widehat{C}]^2\right| + d\mathcal{A}_\omega(C)}$, *si* $[\widehat{C}]^2 < 0$.

2. *Si* $\alpha\,\mathcal{D}(\mathcal{S})$ *se plonge symplectiquement dans* M, $\alpha > 0$, *alors pour tout* $k \in \alpha\,\mathbb{N}$, $k \gg 1$, *il existe une courbe symplectique* $C \subset M$ *Poincaré duale à* $\frac{k}{\alpha}\omega$ *qui réalise* $\mathcal{S}^{\otimes k}$.

Proposition 2. *Soient* $\mathcal{S}$ *une singularité algébrique en* $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ *le domaine associé par le théorème 1. Il existe des nombres réels* $a_i(\mathcal{D}(\mathcal{S})) > 0$, $i = 1, \cdots, K$. *tels que*

1. *On a* $\mathrm{Vol}(\mathcal{D}(\mathcal{S})) = \sum_{i=1}^{K} \mathrm{Vol}(B(a_i))$.
2. *La réunion disjointe* $\bigsqcup_{i=1}^{K} \overset{\circ}{B}(a_i)$ *se plonge symplectiquement dans* $\mathcal{D}(\mathcal{S})$.
3. *Pour toute variété* (M,ω) *de la classe* $\mathcal{C}^*$, *si* $\bigsqcup_{i=1}^{K} \alpha B(a_i)$ *se plonge symplectiquement dans* M, *alors* $\alpha\,\mathcal{D}(\mathcal{S})$ *se plonge symplectiquement dans* M.
4. *Le domaine* $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ *est un domaine de Liouville.*

Le théorème 1 associe ainsi à chaque singularité un domaines symplectique, qui transfère le problème de réalisabilité de $\mathcal{S}^{\otimes k}$ par une courbe de degré dk en un problème de plongement de ce domaine dans $\mathbb{C}P^2$. La proposition 2 garantit par ailleurs que ce problème est équivalent à un problème d'empilement de boules, qu'on sait donc étudier complètement grâce aux invariants ECH de Hutchings. On obtient ainsi une théorie symplectique des singularités algébriques, dont les conséquences restent à étudier.

Du coté symplectique, ces résultats donnent une classe de domaines beaucoup plus grosse que celle des domaines toriques concaves dont les plongements dans $\mathbb{C}P^2$ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ sont étudiables explicitement en les ramenant à un problème d'empilement de boules.

Le théorème 1 et la proposition 2 font l'objet d'un article en cours d'écriture avec Emmanuel Opshtein. Aucun article issu de la thèse ou d'un quelconque autre travail n'est paru pour l'instant.

Références

[Bir97] Paul Biran. Symplectic packing in dimension 4. *Geometry and Functional Analysis*, pages 420–437, 1997.

[Bir01] Paul Biran. Lagrangian barriers ans symplectic embeddings. *Geom. Funct. Anal.*, pages 407–464, 2001.

[Gro85] M. Gromov. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Inventiones mathematicae*, pages 307–347, 1985.

[HR14] Keon Choi ; Daniel Cristofaro-Gardiner ; David Frenkel ; Michael Hutchings and Vinicius G. B. Ramos. Symplectic embeddings into four-dimensional concave toric domains. *Arxiv e-print, arXiv :1310.6647v2*, 2014.

[McD09] Dusa McDuff. Symplectic embeddings of 4-dimensional ellipsoids. *Journal of Topology*, 2009.

[McD11] Dusa McDuff. The hofer conjecture on embedding symplectic ellipsoids. *Journal of Differential Geometry*, pages 519–532, 2011.

[MP94] Dusa McDuff and Leonid Polterovich. Symplectic packings and algebraic geometry. (with an appendix by y. karshon). *Inventiones mathematicae*, 115(3) :405–430, 1994.

[Ops14] Emmanuel Opshtein. Symplectic packings in dimension 4 and singular curves. *Journal of Symplectic Geometry*, 2014.