1 Résumé

Les structures de contact apparaîssent de manière naturelle lors de la formalisation d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1 ou encore lors de la formalisation de problèmes de propagation d'ondes. Déjà dans la deuxième moitié du XIXème siècle, dans un formalisme différent d'aujourd'hui, S. Lie s'intéresse aux changements de variables qui préservent la structure de contact canonique de la variété des 1-jets de l'espace de configuration d'un système physique. Il démontre que ces changements de variables préservent également les solutions des équations aux dérivées partielles d'ordre 1 considérées sur l'espace de configuration. De même la théorie de propagation des ondes lumineuses de C. Huygens, qui décrit l'évolution de fronts d'ondes, se formule très clairement lorsque l'on munit la variété des éléments de contact de l'espace physique où se propage cette lumière de sa structure de contact canonique.

L'étude de la géométrie de l'espace des symétries d'une variété de contact a été introduite quant à elle bien plus tard par Eliashberg et Polterovich en 2000 [8]. Ils démontrent que certaines variétés de contact admettent des propriétés de rigidité géométrique - à savoir l'impossibilité de déplacer certains sous-ensembles particuliers sous peine de briser la structure de contact - qui permettent de munir le revêtement universel du groupe des contactomorphismes d'une relation d'ordre partiel naturel. Ils appellent de telles variétés de contact des variétés ordonnables. Par un procédé systématique qui s'applique à un groupe admettant une relation d'ordre partiel, ils associent au revêtement universel du groupe des contactomorphismes d'une variété de contact ordonnable un espace métrique ordonné.

Grâce à des résultats de rigidités géométriques similaires de l'espace des 1-jets d'une variété compacte muni de sa structure de contact canonique, S. Sandon [13] déduit que tout contactomorphisme à support compact de $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$, muni de sa structure de contact standard, a des points translatés non triviaux. Un point translaté non trivial pour un contactomorphisme, par définition, est d'une part un point dont l'image par ce contactomorphisme est donné par une translation non nulle dans la direction S^1 et d'autre part un point où la forme de contact est préservée par ce contactomorhpisme. Cette direction S^1 est en fait la direction du flot de Reeb associé à la forme de contact standard. Ces résultats de rigidité de l'espace des 1-jets d'une variété compacte ont été obtenus par M. Chaperon [3], J.-C. Sikorav [15] et D. Théret [17] à l'aide de la technique des fonctions génératrices. De manière analogue à la métrique de C. Viterbo sur le groupe des symplectomorphismes hamiltoniens à support compact de l'espace euclidien [20], S. Sandon dans [12] construit alors une norme invariante par conjugaison et non bornée sur le groupe des contactomorphismes à support compact de $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ en associant à un contactomorphisme la somme des translations de certains points translatés. Ces translations sont choisies par des méthodes de minimax sur "sa" fonction génératrice.

Depuis, plusieurs normes invariantes par conjugaison non bornées ont été introduites sur le groupe des contactomorphismes - ou sur le revêtement universel de ce groupe - de différentes variétés de contact [9], [21], [4]. Toutes exploitent fortement et nécessairement dans leur définition la structure de contact de la variété sous-jacente. En effet, D. Burago, S. Ivanov et L. Polterovich dans [2], et T. Tsuboi [18], [19] ont démontré que seule la structure différentielle est trop flexible, pas assez rigide, pour permettre l'existence de normes invariantes par conjugaison non triviales sur le groupe des difféomorphismes d'une variété compacte.

A l'inverse, dans le cas des variétés de contact non ordonnables connues à ce jour, la trop grande flexibilité géométrique interdit l'existence de normes invariantes par conjugaison non triviales sur le groupe des contactomorphismes ou sur son revêtement universel. Y. Eliashberg, S. S. Kim et L. Polterovich [7] sont les premiers à exhiber la flexibilité géométrique qu'implique la non ordonnabilité. En effet ils construisent une bijection entre les chemins positifs de contac-

tomorphismes du bord de contact (P, η) d'une variété de Liouville $(W, \omega = d\lambda)$ et les domaines étoilés fibre-par-fibre de $(W \times S^1, \mathrm{Ker}(dz - \lambda))$. Lorsque (P, η) est non ordonnable, ils utilisent un lacet contractile de contactomorphismes de (P, η) engendré par une fonction hamiltonienne strictement positive - dont ils démontrent l'existence en l'absence de la relation d'ordre partiel - pour construire des tassements de certains domaines de $(W \times S^1, \mathrm{Ker}(dz - \lambda))$. Ils montrent que ces tassements préservent la structure de contact de cette dernière variété. Ces mêmes tassements sont ensuite utilisés par M. Fraser, L. Polterovich, D. Rosen [9] pour démontrer l'impossibilité d'avoir des normes invariantes par conjugaison sur l'espace des contactomorphismes à support compact de certains ouverts de $W \times S^1$. P. Massot et S. Courte [5] utilisent quant à eux la flexibilité des legendriennes des variétés non ordonnables caractérisées par Y. Eliashberg, S. S. Kim et L. Polterovich [7] pour arriver à la conclusion, encore une fois, de l'inexistance de normes invariantes par conjugaisons non triviales.

Nous introduisons dans les deux premiers chapitres de cette thèse la relation d'ordre de Y. Eliashberg et L. Polterovich [8] et le sélecteur de translation de S. Sandon [13] sur le groupe des contactomorphismes à support compact de $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$. Au chapitre 3 nous rappelons la définition de la norme de M. Fraser, L. Polterovich, D. Rosen [9] - que nous appelons FPR - les normes d'oscillation et discriminante de V. Colin et S. Sandon [4] et enfin la norme de E. Shelukhin [14] (qui n'est pas invariante par conjugaison). Nous formalisons également la notion de géodésique pour les trois dernières normes citées. Les chapitres 4, 5 et 6 sont quant à eux dédiés aux résultats que nous avons obtenus durant cette thèse. Au chapitre 4 nous donnons une caractérisation de certaines géodésiques sur le groupe des contactomorphismes à support compact de $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$. Nous déduisons alors une nouvelle démonstration du fait que les normes considérés sont non bornées. Nous introduisons le chapitre 5 en montrant l'existence de normes (pas forcément invariantes par conjugaison) non bornées sur le revêtement universel du groupe des contactomorphismes de toute variété de contact compacte ordonnable. Ces normes sont des variantes de la norme FPR et sont compatibles avec la relation d'ordre. Ce résultat sans doute bien connu des spécialistes ne figure pas dans la littérature. De plus dans le cas du cotangent unitaire du tore - qui fait partie des variétés de contact ordonnables - nous calculons explicitement les normes d'une grande famille d'éléments du revêtement universel de son groupe des contactomorphismes. Nous déduisons encore le fait que ces normes sont non bornées. Enfin dans le chapitre 6 nous introduisons la notion de spectre de contact d'un ouvert - qui est un ensemble de valeurs que nous associons à cet ouvert - dans le contexte des variétés de contact qui sont la "contactification périodique" de variétés de Liouville. Nous discutons de plusieurs des propriétés naturelles de cet ensemble de valeurs ainsi que des liens qu'il entretient avec les chemins positifs de contactomorphismes du bord de contact de la variété de Liouville en question.

Au chapitre 4, l'outil essentiel pour prouver que les chemins de contactomorphismes que nous caractérisons sont des géodésiques sur le groupe des contactomorphismes de $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ est le sélecteur de translation construit par S. Sandon que nous décrivons au chapitre 2. L'idée est de minorer les normes de E. Shelukhin, FPR, d'oscillation et discriminante par le sélecteur de translation. Nous calculons ensuite explicitement d'une part la translation choisie pour les chemins que nous construisons et d'autre part la longueur de ces chemins. Nous montrons que ces deux nombres coïncident et donc que la longueur du chemin construit réalise son minimum. Cela nous permet de conclure que ces chemins sont des géodésiques. Il n'est alors pas difficile de construire des géodésiques de longueurs aussi grandes que l'on veut.

Au chapitre 5, l'outil principal que nous utilisons pour avoir des résultats sur le revêtement universel du groupe des contactomorphismes du cotangent unitaire du tore est un invariant symplectique introduit par J.-C. Sikorav [16] et Y. Eliashberg [6] nommé le *Shape*. L'idée de la preuve reste quant à elle la même. Nous minorons les normes par un nombre qui provient du *Shape*, et nous montrons que les normes des chemins que nous considérons réalisent ce minimum.

Cette fois-ci le calcul explicite du *Shape* se base sur un théorème de M. Gromov [11] qui assure l'intersection de lagrangiennes exactes du cotangent avec la section nulle. Nous déduisons encore une fois le caractère (stablement) non bornée de ces normes sur cet espace.

Au chapitre 6, nous définissons le spectre de contact d'un ouvert à bord lisse de $(W \times S^1, \mathrm{Ker}(dz - \lambda))$ lorsque $(W, \omega = d\lambda)$ est une variété symplectique exacte. Nous utilisons pour cela la distribution caractéristique dont est munie le bord de cet ouvert. Le spectre correspond alors à l'ensemble des longueurs des cordes de Reeb que contiennent les feuilles de cette distribution caractéristique. Nous montrons que ce nouvel ensemble de nombres généralise la notion du spectre symplectique d'un ouvert à bords lisse de $(W, \omega = d\lambda)$ et qu'il contient des invariants de contact. Lorsque $(W, \omega = d\lambda)$ est en plus une variété de Liouville, nous exhibons des liens entre la longueur d'oscillation et discriminante d'un chemin strictement positif de contactomorphismes du bord de contact de cette variété de Liouville avec le spectre du domaine étoilé fibre-par-fibre de $(W \times S^1, \mathrm{Ker}(dz - \lambda))$ que lui associent Y. Eliashberg, S. S. Kim et L. Polterovich.

Plusieurs questions restent cependant ouvertes :

1. Les normes de FPR, E. Shelukhin, discriminante et d'oscillation sont-elle équivalentes sur l'espace des contactomorphismes à support compact de $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$? Sont-elles stablement non bornées ? Quelles sont les géodésiques minimales de la métrique de Hofer sur l'espace des symplectomorphismes hamiltoniens à support compact de l'espace euclidien qui se relèvent - via le procédé de *contact lift* - en des géodésiques de ces normes ?
2. Existe-t-il une norme invariante par conjugaison non bornée sur le revêtement universel du groupe des contactomorphismes du cotangent unitaire du tore ? Plus généralement, existe-t-il une variétés de contact compacte n'admettant pas de flot de Reeb périodique mais dont le revêtement universel du groupe de ses contactomorphismes est muni d'une norme invariante par conjugaison non bornée ?
3. Soit $(W, \omega = d\lambda)$ une variété de Liouville. Peut-on utiliser les sélecteurs de translation de S. Sandon [13] ou de P. Albers et W. Merry [1] pour déduire, comme le font U. Frauenfelder, V. Ginzburg et F. Schlenk dans le cas symplectique [10], que le spectre de contact de "beaucoup" d'ouverts de $(W \times S^1, \mathrm{Ker}(dz - \lambda))$ est non vide ? Existe-il dans ce cas un analogue de la capacité de Hofer-Zendher ? La capacité de contact d'un ouvert étoilé fibre-par-fibre appartient-elle au spectre de ce dernier ?

2 Informations complémentaires

Je suis en ce moment en cours de rédaction d'un article sur les résultats que je présente dans le chapitre 4 de ma thèse. J'ai présenté ces résultats devant les équipes de géométrie symplectique de l'Université de Strasbourg, l'Université de Paris-Saclay ainsi que l'Instituto Superior Técnico à Lisbonne. Aucune communication de ces résultats par d'autres auteurs ne figure dans la littérature.

Références

[1] Peter Albers and Will J. Merry. Orderability, contact non-squeezing, and Rabinowitz Floer homology. *J. Symplectic Geom.*, 16(6) :1481–1547, 2018.

[2] Dmitri Burago, Sergei Ivanov, and Leonid Polterovich. Conjugation-invariant norms on groups of geometric origin. In *Groups of diffeomorphisms*, volume 52 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 221–250. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008.

[3] Marc Chaperon. Une idée du type "géodésiques brisées" pour les systèmes hamiltoniens. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 298(13) :293–296, 1984.

[4] Vincent Colin and Sheila Sandon. The discriminant and oscillation lengths for contact and Legendrian isotopies. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(7) :1657–1685, 2015.

[5] Sylvain Courte and Patrick Massot. Contactomorphism groups and legendrian flexibility. *arXiv.1803.07997*, 2019.

[6] Yakov Eliashberg. New invariants of open symplectic and contact manifolds. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(3) :513–520, 1991.

[7] Yakov Eliashberg, Sang Seon Kim, and Leonid Polterovich. Geometry of contact transformations and domains : orderability versus squeezing. *Geom. Topol.*, 10 :1635–1747, 2006.

[8] Yakov Eliashberg and Leonid Polterovich. Partially ordered groups and geometry of contact transformations. *Geom. Funct. Anal.*, 10(6) :1448–1476, 2000.

[9] Maia Fraser, Leonid Polterovich, and Daniel Rosen. On Sandon-type metrics for contactomorphism groups. *Ann. Math. Qué.*, 42(2) :191–214, 2018.

[10] Urs Frauenfelder, Viktor Ginzburg, and Felix Schlenk. Energy capacity inequalities via an action selector. In *Geometry, spectral theory, groups, and dynamics*, volume 387 of *Contemp. Math.*, pages 129–152. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[11] Mikhael Gromov. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82(2) :307–347, 1985.

[12] Sheila Sandon. An integer-valued bi-invariant metric on the group of contactomorphisms of $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$. *J. Topol. Anal.*, 2(3) :327–339, 2010.

[13] Sheila Sandon. Contact homology, capacity and non-squeezing in $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ via generating functions. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 61(1) :145–185, 2011.

[14] Egor Shelukhin. The Hofer norm of a contactomorphism. *J. Symplectic Geom.*, 15(4) :1173–1208, 2017.

[15] Jean-Claude Sikorav. Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne. *Comment. Math. Helv.*, 62(1) :62–73, 1987.

[16] Jean-Claude Sikorav. Rigidité symplectique dans le cotangent de T^n. *Duke Math. J.*, 59(3) :759–763, 1989.

[17] David Théret. *Utilisation des fonctions génératrices en géometrie symplectique globale*. PhD thesis, 1996. Thèse de doctorat dirigée par Chaperon, Marc Mathématiques Paris 7 1996.

[18] Takashi Tsuboi. On the uniform perfectness of diffeomorphism groups. In *Groups of diffeomorphisms*, volume 52 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 505–524. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008.

[19] Takashi Tsuboi. On the uniform perfectness of the groups of diffeomorphisms of even-dimensional manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 87(1) :141–185, 2012.

[20] Claude Viterbo. Symplectic topology as the geometry of generating functions. *Math. Ann.*, 292(4) :685–710, 1992.

[21] Frol Zapolsky. Geometry of contactomorphism groups, contact rigidity, and contact dynamics in jet spaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (20) :4687–4711, 2013.