Résumé de thèse

Yohann Bouilly sous la direction d'Olivier Guichard

Septembre 2021

La géométrie moderne a depuis le programme d'Erlangen de 1872, initié par Felix Klein, vu apparaître la notion de structure géométrique sur les variétés. En dimension 2, pour les surfaces, trois types de géométries sont notables :

- la géométrie sphérique basée sur le modèle de la sphère
- la géométrie plane (euclidienne) basée sur le modèle du plan euclidien
- la géométrie hyperbolique basée sur le modèle du demi-plan de Poincaré $\mathbf{H}^2$

Le théorème de classification des surfaces connexes, orientées et fermées et la formule de Gauss-Bonnet permettent de déterminer le type de géométrie permis selon le type topologique de la surface. Précisément une sphère admet une géométrie sphérique, le tore une géométrie plane et les surfaces de genres supérieurs à 2 une géométrie hyperbolique. Comprendre le comportement de ces structures a été la motivation de nombreuses recherches. Les structures planes sur le tore sont comprises et sont en bijection avec le demi-plan supérieur.

Fixons une surface Σ connexe, orientée, fermée et de genre $g \geq 2$. Les structures hyperboliques sur Σ peuvent être encodées par des morphismes $\pi_1\Sigma \to \mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^2)$, dits d'holonomie, qui sont injectifs et dont les images sont des sous-groupes discrets. De plus, deux structures hyperboliques isométriques vont avoir des morphismes d'holonomie conjugués. Cela inclut l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\Sigma)$ qui est l'espace des classes d'isométries de structures hyperboliques sur Σ dans l'ensemble des classes de conjugaison de morphismes $\pi_1\Sigma \to \mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^2)$. Formellement cet ensemble, la variété des caractères de Σ dans $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^2)$, est le quotient Hausdorff par l'action par conjugaison de $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^2) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ de l'ensemble des morphismes $\{\pi_1\Sigma \to \mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^2)\}$, muni de la topologie compacte-ouverte. Nous le noterons $\mathcal{X}(\Sigma, \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}))$. Goldman a classifié les composantes connexes de cette variété des caractères par un invariant entier et borné et a montré par ailleurs que deux de ses composantes connexes sont homéomorphes à l'espace de Teichmüller.

Outre ces structures encodées par ces morphismes, une notion de fibrés au dessus de Σ a été introduite avec toute une panoplie de déclinaisons : fibrés vectoriels, plats, holomorphes, G-fibrés principaux (G est un groupe de Lie). Avec ces objets est apparue la question de dériver des sections. Les connexions ont ainsi été introduites, impliquant le transport parallèle et une définition de morphisme d'holonomie associée. Un résultat marquant, le

théorème de Narasimhan-Seshadri, assure une bijection entre les classes d'isomorphismes de fibrés holomorphes de rang n, stables et de degré 0 et les classes de conjugaison de morphismes $\pi_1\Sigma \to \mathrm{SU}(n)$ irréductibles. En d'autres termes, on inclut l'ensemble de certaines classes de fibrés dans la variété des caractères $\mathcal{X}(\Sigma, \mathrm{SU}(n))$.

Ces différents points de vue témoignent de la richesse des variétés de caractères dans l'étude moderne de la géométrie.

Précisons que la variété des caractères est un espace topologique séparé qui contient un ouvert dense et lisse. Sur cet ouvert, une structure symplectique a été construite par Goldman et cette structure permet la construction d'une mesure dans la classe de Lebesgue que l'on étend à la variété des caractères.

L'objet de cette thèse est d'étudier ces variétés sous un angle dynamique. Fixons G un groupe de Lie semi-simple. Les difféomorphismes de Σ induisent des automorphismes de $\pi_1\Sigma$ agissant sur les morphismes $\pi_1\Sigma \to G$. L'action du sous-groupe des automorphismes intérieurs est contenue dans l'action par conjugaison de G. Cela induit une action du groupe modulaire $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ sur la variété des caractères $\mathcal{X}(\Sigma, G)$. Cette action préserve par ailleurs la mesure de Goldman. Nous observons une différence de comportement de l'action selon que G soit compact ou non.

Dans le cas où G est un groupe de Lie compact, Pickrell et Xia ont démontré que l'action de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ sur $\mathcal{X}(\Sigma, G)$ est *ergodique* par rapport à la mesure de Goldman. C'est à dire qu'un sous-espace $\mathrm{Mod}(\Sigma)$-invariant est de mesure nulle ou son complémentaire est de mesure nulle. Une conséquence est que presque toutes les orbites sont denses.

A contrario, l'action de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ sur l'espace de Teichmüller de Σ est connue pour être *proprement discontinue*. Cela signifie que pour tout compact $K \subset \mathcal{T}(\Sigma)$, l'ensemble $\{\phi \in \mathrm{Mod}(\Sigma) \mid \phi \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini. Les orbites sortent des compacts en "un temps fini", notamment ceux d'intérieur non-vide, ce qui tranche avec l'ergodicité. Goldman a conjecturé que l'action sur les composantes connexes de $\mathcal{X}(\Sigma, \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}))$ qui ne correspondent pas à l'espace de Teichmüller de Σ est ergodique. Dans l'intuition de cette conjecture, Marché et Wolff ont introduit des sous-ensembles de ces composantes en lien avec la condition de Bowditch. Nous noterons $\mathcal{MW}^k(\Sigma)$ ce sous-espace dans la composante connexe associée au nombre k. En outre, ils ont montré que sur ces sous-espaces, que nous appellerons les espaces de Marché-Wolff dans ce résumé, l'action du groupe modulaire est ergodique.

Cette thèse a pour objectif de traiter diverses questions sur les propriétés dynamiques de cette action.

Action du groupe modulaire dans le cas des surfaces à bord

Lorsque la surface Σ a au moins une composante de bord, la variété des caractères est partitionnée par le comportement sur le bord. Fixons n le nombre de composantes de bord, que nous noterons $\partial_1\Sigma \ldots, \partial_n\Sigma$ et donnons nous n classes de conjugaison $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ dans

$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$. La variété des caractères relative à $\underline{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n)$, notée $\mathcal{X}(\Sigma, \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}), \underline{\mathcal{C}})$, est l'ensemble des classes de conjugaisons de représentations $\tau : \pi_1\Sigma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ telles que $\tau(\partial_i\Sigma) \in \mathcal{C}_i$, pour tout $i = 1, \ldots, n$. Mondello décrit les composantes connexes de ces variétés de caractères relatives par un invariant vérifiant certaines conditions.

Pour certains de ces invariants, choisissons en un noté e et donc pour la composante connexe associée, nous introduisons un sous-espace $\mathcal{MW}^e(\Sigma, \underline{\mathcal{C}})$ analogue au sous-espace de Marché-Wolff.

Nous montrons le théorème :

Théorème A. *L'action de* $\mathrm{PMod}(\Sigma)$ *sur le sous-espace* $\mathcal{MW}^e(\Sigma, \underline{\mathcal{C}})$ *est ergodique par rapport à la mesure de Goldman.*

Action du groupe de Torelli

Le *groupe de Torelli* est le noyau de l'action de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ sur le premier espace d'homologie $\mathrm{H}_1(\Sigma, \mathbf{Z})$. Un corollaire d'un théorème de Funar et Marché est que le groupe de Torelli agit ergodiquement sur la variété des caractères $\mathcal{X}(\Sigma, \mathrm{SU}(2))$. Dans Bouilly 2020 soumis début 2020, nous donnons une nouvelle preuve de ce résultat et l'étendons à un cas plus général :

Théorème B. *Soit G un groupe de Lie connexe, semi-simple et compact. L'action du groupe de Torelli sur les composantes connexes de la variété des caractères $\mathcal{X}(\Sigma, G)$ est ergodique.*

Nous montrons en corollaire que l'action sur ces composantes connexes est de plus *faiblement mélengeante* (et même mélengeante à tout ordre).

Une investigation qui a occupé une partie conséquente de ces trois années de thèse est la question de l'ergodicité du groupe de Torelli sur les espaces de Marché-Wolff $\mathcal{MW}^k(\Sigma)$. Une stratégie adaptant celle employée lors de la démonstration du théorème B et utilisant le théorème A a été proposée et seul un point de celle-ci est encore en cours de démonstration.

Nous conjecturons :

Conjecture A. *Pour les k associés aux $4g-5$ composantes connexes qui ne correspondent pas à l'espace de Teichmüller, le groupe de Torelli agit ergodiquement sur les sous-espaces $\mathcal{MW}^k(\Sigma)$ par rapport à la mesure de Goldman.*

Dynamique topologique

Comme il a été signalé plus haut, l'ergodicité d'une action implique que presque toute orbite est dense. Ce résultat ne donne malheureusement aucune condition plus précise permettant de dire si telle orbite est dense ou non. A titre d'exemple, prenons le cercle $\mathbf{S}^1$ sur lequel agit le groupe engendré par la rotation r_θ d'angle θ. Si $\theta \in \pi \cdot \mathbf{Q}$, l'action de $\langle r_\theta \rangle$ n'est pas ergodique et toutes les orbites sont finies. Mais si $\theta \notin \pi \cdot \mathbf{Q}$, l'action de $\langle r_\theta \rangle$ est ergodique et toutes les orbites sont denses.

Soit G un groupe de Lie compact. Goldman a posé la question : pouvons nous trouver une condition sur $\tau : \pi_1\Sigma \to G$ de sorte que $\mathrm{Mod}(\Sigma) \cdot [\tau]$ soit dense dans $\mathcal{X}(\Sigma, G)$?

Previte et Xia ont répondu par l'affirmative à cette question pour $G = \mathrm{SU}(2)$ en donnant une condition sur τ qui est nécessaire et suffisante à ce que l'orbite associée à τ soit dense. Ils ont ainsi montré que l'orbite $\mathrm{Mod}(\Sigma) \cdot [\tau]$ est dense si et seulement si τ a une image dense dans $\mathrm{SU}(2)$.

Avec Gianluca Faraco du "Max Planck Institute for Mathematics" de Bonn, nous conjecturons que pour un groupe de Lie compact G, la condition de densité de l'image d'une représentation $\tau : \pi_1\Sigma \to G$ donnée assure de la densité de son orbite et avons collaboré à la démonstration d'un tel énoncé. Pour être complets, nous avons commencé par le cas des tores $\mathbf{T}^n$ qui sont les groupes de Lie compacts, connexes et abéliens. La variété des caractères correspond alors à l'espace des représentations du fait que l'action par conjugaison est triviale.

Dans Bouilly and Faraco 2021, soumis en mai 2021, nous démontrons :

Théorème C. *Une représentation $\rho : \pi_1\Sigma \to \mathbf{T}$ a une $\mathrm{Mod}(\Sigma)$-dense si et seulement si son image est dense dans $\mathbf{T}$.*

La preuve de ce résultat utilise une description matricielle "d'avoir une image dense" en associant à chaque représentation une matrice. Un théorème de Ratner nous permet de mener à bien la démonstration du théorème C. Ce résultat semblait connu mais nous ne l'avons trouvé dans aucun document.

Nous nous intéressons actuellement à la preuve de ce théorème lorsque $G = \mathrm{SU}(3)$.

References

Bouilly, Yohann. 2020. *On the Torelli group action on compact character varieties.* arXiv: 2001.08397 `[math.DS]`.

Bouilly, Yohann, and Gianluca Faraco. 2021. "Modular orbits on the representation spaces of compact abelian Lie groups," arXiv: 2103.14875 `[math.DS]`.