Résumé de la thèse

Alexandre Eimer

25 Juin 2021

Résumé général

Nos travaux ont consisté à décrire certaines représentations modulaires issues de l'arithmétique. Précisions immédiatement que ce qui suit est une somme de ce qui sera présenté au jury : l'ordre des théorèmes, ici, n'obéit pas à la succession logique imposée par les démonstrations, mais à la facilité de l'exposition.

Pour être plus précis, fixons quelques notations. Dans ce document,

— p est un nombre premier,
— $\mathbf{F}_p$ est le corps à p-éléments,
— $\mathbf{k}$ est un corps local, possédant une racine primitive p-ième de l'unité notée ξ_p,
— $\mathcal{G}_{\mathbf{k}}(p)$ est le groupe de Galois d'une p-clôture de $\mathbf{k}$,
— si G est un groupe, $H^i(G, \mathbf{F}_p)$ désigne le i-ème groupe de cohomologie de G à coefficients dans $\mathbf{F}_p$,
— l'entier n désigne $\dim H^1(\mathcal{G}_{\mathbf{k}}(p), \mathbf{F}_p)$,
— $\mathcal{D}_{k,n}$ est le pro-p-groupe donné par générateurs et relations

$$\langle x_1, \ldots, x_n | x_1^{p^k}(x_1, x_2)(x_3, x_4) \ldots (x_{n-1}, x_n) \rangle ,$$

— si $\mathcal{G}$ est un pro-p-groupe, $\Phi(\mathcal{G})$ désigne son Frattini (cf. [DDSMS99]),
— $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ est une p-extension galoisienne finie,
— si M est un $\mathbf{F}G$-module, $\Omega(M)$ désigne l'objet de la catégorie stable qui est le décalage de Heller de M ([CTVEZ03]).

L'objectif principal était donc de décrire l'action de $Gal(\mathbf{K}/\mathbf{k})$ sur le $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel

$$J(\mathbf{K}) = \mathbf{K}^\times / \mathbf{K}^{\times p} .$$

Les représentations de p-groupes en caractéristique p offrant toujours un véritable défi quant à leur description, puisque le théorème de Maschke ne saurait en aucun cas s'appliquer, plusieurs possibilités se sont offertes à nous, pour affronter ce problème.

Tout d'abord, la théorie des modules de type de Jordan constant introduits par J. Carlson, E. Friedlander J. Pevtsova dans [CFP08]. Certains travaux en effet permettaient de soupçonner une structure relativement simple de ces derniers ([Fad60],[MS03]).

Sous réserves d'une hypothèse, nous avons apporté une réponse à la question de l'étude de ces modules.

Théorème 1. *Avec nos notations, si $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ n'est pas cyclique, alors $J(\mathbf{K}) = \mathbf{K}^\times/\mathbf{K}^{\times p}$ est un $Gal(\mathbf{K}/\mathbf{k})$-module de type de Jordan constant. De plus, son type de Jordan stable est $[1]^2$.*

Ce théorème, bien qu'il permette d'englober toutes les extensions p-élémentaires abéliennes, dissimule des comportements assez contrastés. En effet, il existe des extensions du même corps dont le groupe de Galois est isomorphe mais dont la structure de $J(\mathbf{K})$ soit radicalement différente.

C'est pourquoi nous avons complété cette étude par le calcul de la cohomologie qui, elle, permet de discriminer entre plusieurs cas :

Théorème 2. *Posons $G = Gal(\mathbf{K}/\mathbf{k})$. Supposons que G est un p-groupe tel que son anneau de cohomologie $H^\bullet(G, \mathbf{F}_p)$ est de Cohen-Macaulay ; posons alors $d_i(G) = \dim_{\mathbf{F}_p} \hat{H}^i(G, \mathbf{F}_p)$. De surcroît, excluons les cas où G serait un des groupes des quaternions généralisés. On a alors l'alternative suivante*

1. *si l'inflation* $\inf : H^2(Gal(\mathbf{K}/\mathbf{k}), \mathbf{F}_p) \longrightarrow H^2(\mathcal{G}_{\mathbf{k}}(p), \mathbf{F}_p)$ *est nulle, les isomorphismes suivant sont vérifiés :*

$$\begin{cases} H^s(G, J(\mathbf{K})) & \simeq & \hat{H}^{s+2}(G, J(\mathbf{K})) \oplus H^{s-2}(G, J(\mathbf{K})) \quad s \geqslant 1 \\ H^0(G, J(\mathbf{K})) & \simeq & \mathbf{F}_p^{d_2(G)+(n-d_1(G))} \end{cases} .$$

2. *si l'inflation* $\inf\colon H^2(Gal(\mathbf{K}/\mathbf{k}),\mathbf{F}_p) \longrightarrow H^2(\mathcal{G}_{\mathbf{k}}(p),\mathbf{F}_p)$ *est non-nulle, les isomorphismes suivant sont vérifiés :*

$$\begin{cases} H^1(G,J(\mathbf{K})) & \simeq & H^3(G,\mathbf{F}_p) \\ H^s(G,J(\mathbf{K})) & \simeq & H^{s+2}(G,\mathbf{F}_p)\oplus H^{s-2}(G,\mathbf{F}_p) \quad s\geqslant 2 \\ H^0(G,J(\mathbf{K})) & \simeq & \mathbf{F}_p^{d_2(G)-1+(n-d_1(G))}\,. \end{cases}$$

Ce critère sur l'inflation provient en fait d'un critère sur une application particulière, qui apparaît dans une suite exacte courte cruciale pour nos démonstrations.

Proposition 3. *Soit* $G = Gal(\mathbf{K}/\mathbf{k})$ *où* G *est un* p*-groupe. Pour* $s\in\{-1,2\}$*, il existe un module* $\omega_s(\mathbf{F}_p)$ *stablement isomorphe à* $\Omega^s(\mathbf{F}_p)$ *et une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \omega_{-1}(\mathbf{F}_p) \xrightarrow{\kappa} \omega_2(\mathbf{F}_p) \longrightarrow J(\mathbf{K}) \longrightarrow 0\ .$$

Si l'application κ est stablement nulle, alors l'inflation est nulle. Par voie de conséquence, le module $J(\mathbf{K})$ est stablement isomorphe à $\Omega^2(\mathbf{F}_p)\oplus\Omega^2(\mathbf{F}_p)$, ce qui se révèle faux lorsque κ ne l'est pas. L'étude de κ étant en soi plutôt malaisée, surtout en tant qu'application stable, nous avons plutôt développé un critère plus maniable pour les extensions extensions p-élémentaires abéliennes.

Fixons alors la permutation

$$\sigma = (1,2)(3,4)\dots(n-1,n)\,.$$

Pour ce faire, on définit sur $\mathcal{D}_{k,n}/\Phi(\mathcal{D}_{k,n})$ une forme symplectique

$$\mathrm{Lab}(x_i,x_j) = \delta_{j,\sigma(i)} \quad i<j$$

où $\delta_{s,j}$ est le symbole de Kronecker usuel, valant 1 si et seulement si $s=j$ et 0 dans toutes les autres circonstances.

Théorème 4. *Soit* $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ *une* p*-extension élémentaire abélienne, d'un corps local* $\mathbf{k}$ *possédant une racine primitive* p*-ième de l'unité. Soient* $G = Gal(\mathbf{K}/\mathbf{k})$ *et* $\mathcal{H} = Gal(\mathbf{k}(p)/\mathbf{K})$*. Posons* $H = \mathcal{H}/\Phi(\mathcal{G}_{\mathbf{k}}(p)) \subset \mathcal{G}_{\mathbf{k}}(p)/\Phi(\mathcal{G}_{\mathbf{k}}(p))$*, et* n*. Alors l'application*

$$\inf\colon H^2(G,\mathbf{F}_p) \longrightarrow H^2(\mathcal{G}_{\mathbf{k}}(p),\mathbf{F}_p)$$

est nulle si et seulement si

— $\xi_{p^2}\in\mathbf{k}^\times$ *et* H *contient un espace isotrope de dimension* $\frac{n}{2}$ *pour* Lab*,*

— H *contient un espace isotrope de dimension* $\frac{n}{2}$ *pour* Lab*, et* H *n'est pas contenu dans l'hyperplan* $\ker\mathrm{Lab}(x_2,\cdot)$*, sous réserve que* $\xi_{p^2}\notin\mathbf{k}$*.*

Notre démarche a cependant permis l'obtention de quelques résultats supplémentaires qui sont autant de « sous-produits ». En effet, l'approche par des calculs explicites nous a mené par exemple à donner une expression par générateurs et relations de toute une famille de modules stablement isomorphes à $\Omega^s(\mathbf{F}_p)$.

Nous nous permettons cependant d'insister sur un en particulier puisqu'il s'inscrit dans le sillage d'autres travaux ([AGKM01]) : il s'agit de la structure de l'extension p-élémentaire abélienne maximale.

Proposition 5. *Soit* $\mathbf{K}$ *la* p*-extension élémentaire abélienne d'un corps local* $\mathbf{k}$ *qui possède une racine primitive* p*-ième de l'unité. Alors le* $Gal(\mathbf{K}/\mathbf{k})$*-module* $J(\mathbf{K})$ *a pour longueur*

$$l(J(\mathbf{K})) = n(p-1)-1\,,$$

où n *est la dimension de* $\mathbf{k}^\times/\mathbf{k}^{\times p}$ *en tant que* $\mathbf{F}_p$*-espace vectoriel. De plus si* p *est impair, alors l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\dim_{\mathbf{F}_p}\mathrm{Soc}^2(J(\mathbf{K}))/\mathrm{Soc}(J(\mathbf{K})) = \frac{(n-2)(n^2+5n+3)}{3}\,.$$

Le mémoire fournit au jury se termine qui plus est sur un contre-exemple montrant que le Théorème 1 ne peut être étendu à d'autres corps.

Liste des travaux

Une partie des théorèmes énoncés ci-dessus figurent déjà dans le préprint [Eim21], c'est-à-dire sur ArXiv, sous le titre

Galois module structure of pth *power classes of abelian extensions of local fields*

Références

[AGKM01] Alejandro Adem, Wenfeng Gao, Dikran B. Karagueuzian, and Ján Mináč. Field theory and the cohomology of some Galois groups. *J. Algebra*, 235(2) :608–635, 2001.

[CFP08] Jon F. Carlson, Eric M. Friedlander, and Julia Pevtsova. Modules of constant Jordan type. *J. Reine Angew. Math.*, 614 :191–234, 2008.

[CTVEZ03] Jon F. Carlson, Lisa Townsley, Luis Valeri-Elizondo, and Mucheng Zhang. *Cohomology rings of finite groups*, volume 3 of *Algebra and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003. With an appendix : Calculations of cohomology rings of groups of order dividing 64 by Carlson, Valeri-Elizondo and Zhang.

[DDSMS99] J. D. Dixon, M. P. F. Du Sautoy, A. Mann, and D. Segal. *Analytic Pro-P Groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2 edition, 1999.

[Eim21] Alexandre Eimer. Galois module structure of pth power classes of abelian extensions of local fields, 2021.

[Fad60] D. K. Faddeev. On the structure of the reduced multiplicative group of a cyclic extension of a local field. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 24 :145–152, 1960.

[MS03] Ján Mináč and John Swallow. Galois module structure of pth-power classes of extensions of degree p. *Israel J. Math.*, 138 :29–42, 2003.