Modélisation de la convection naturelle en milieux poreux : développement des solutions semi-analytiques et spectrales pour le problème de transfert d'énergie dans des milieux spéciaux

Modeling of naturel convection in porous media: development of semi-Analytical and Spectral numerical solutions of heat transfer problem in special domains

Fahs Amin (fahs.amin@etu.unistra.fr)

Résumé de thèse

Le problème de la Convection Naturelle (CN) en milieux poreux a des applications répandues dans différents domaines des Sciences pour l'ingénieur. L'importance de ces applications a motivé des études théoriques et expérimentales en mathématiques et physiques appliquées. De nombreux exemples de ces applications peuvent être cités : i) en génies pétrolier et chimique (le fonctionnement des piles à combustible, la gestion, le stockage et l'extraction des conteneurs de carburant et de gaz) ; ii) en génie thermique, on peut citer l'élimination de la chaleur post-accidentelle dans les réacteurs nucléaires, le stockage souterrain et le refroidissement des conteneurs de déchets radioactifs ; en géothermie, la production et la dynamique des lacs et des grands réservoirs peuvent être considérées ; iii) en génie civil et mécanique, le chauffage et de refroidissement des équipements électroniques, les isolations des bâtiments, le stockage et la transformation des aliments sont également des exemples d'application. De ce fait, les études théoriques concernant Convection Naturelle (CN) en milieux poreux sont abondamment publiées dans la littérature scientifique.

La modélisation numérique est utilisée comme un outil commun dans plusieurs applications impliquant la CN dans les milieux poreux. Elle est largement utilisée pour concevoir, surveiller, contrôler et prévoir des systèmes impliquant des processus de CN. Les processus physiques de CN à travers les milieux poreux résultent du couplage entre les processus hydrodynamiques et de transfert de chaleur. Le processus de transfert de chaleur est généralement modélisé en utilisant la loi de conservation de l'énergie (équation de convection-diffusion). Lorsque l'équilibre thermique n'est pas atteint, deux équations représentant le bilan énergétique des phases solide et liquide doivent être considérées avec un terme de couplage représentant l'échange entre les deux phases. Sous l'hypothèse d'équilibre thermique, une équation peut décrire les processus de transfert de chaleur dans les milieux poreux, en combinant les bilans énergétiques des phases liquide et solide et abandonnant le terme d'échange. Dans les applications de CN, le transfert de chaleur conduit à un gradient thermique qui génère un flux convectif. Ainsi, une modélisation précise de la CN nécessite un modèle approprié pour décrire le processus d'écoulement convectif.

La première composante de tout modèle d'écoulement est l'équation de continuité représentant le bilan massique de la phase liquide. La deuxième composante représente la conservation de la quantité de mouvement qui peut être décrite dans différents modèles mathématiques selon le type et les caractéristiques du milieu poreux (Darcy, Brinkman, Darcy-Brinkman ……). En utilisant la relation de force de flottabilité liant la densité du fluide et la température, on obtient un système d'équations couplées décrivant mathématiquement l'écoulement de fluide et le transfert de chaleur. La complexité de ce système rend la solution analytique très difficile à développer. Cette complexité a limité les solutions aux procédures numériques en utilisant des méthodes numériques appropriées. Compte tenu des différentes approximations utilisées lors des résolutions numériques des équations, le travail de vérification de l'exactitude des résultats constitue une tâche difficile en absence de solutions analytiques. Pour surmonter ce problème, des solutions précises sont généralement développées comme cas de référence (benchmark) pour valider les résultats numériques. Ces solutions sont également utiles pour une inter-comparaison des codes commerciaux existants développés selon différents schémas numériques, en termes d'efficacité, de précision et de robustesse. Un autre avantage des solutions hautement précises en raison de leurs conditions aux limites simplifiées est qu'elles permettent une meilleure compréhension des processus physiques et un focus sur l'étude du comportement numérique des solutions, car elles sont exemptes d'artefacts numériques.

Le problème de la cavité poreuse carrée est largement utilisé comme cas de référence courant pour les problèmes de CN en milieux poreux. Il peut être utilisé pour plusieurs applications numériques, théoriques et pratiques. Par ailleurs, toutes les solutions de haute précision existantes dans la littérature scientifique sont développées dans des conditions de régime permanent. Cependant, il est bien connu que les processus de CN dans les milieux poreux se produisent naturellement dans un régime dépendant du temps, car les conditions aux limites peuvent être variables dans le temps. Également il est bien connu que la convergence de la solution en régime permanent est difficile. Pour surmonter cette difficulté, la solution en régime permanent est souvent simulée comme une solution transitoire qui évolue jusqu'à atteindre l'état d'équilibre. Ces régimes dépendant du temps sont très efficaces pour détecter les effets des variations de paramètres sur le processus physique de CN, en particulier pour les sujets d'intérêt de cette thèse: la variation du niveau d'inclinaison du domaine et la prise en compte des variations de température de la paroi chaude dans le temps.

À cet effet, trois objectifs sont identifiés dans cette thèse:

1. Développer une solution de convection naturelle en fonction du temps dans des milieux poreux en utilisant le Modèle Darcy en deux modes: transitoire et instable.
2. Étudier le comportement en fonction du temps de la convection naturelle dans des milieux poreux ayant le niveau d'inclinaison du domaine comme paramètre variable dans deux modes: transitoire et instable.
3. Développer une solution de convection naturelle en fonction du temps dans des milieux poreux en utilisant le Modèle Darcy-Lapwood-Brinkman en deux modes: transitoire et instable.

Pour ce faire, du fait de la grande précision dans les domaines simplement connectés, une méthode spectrale de résidus pondérés de type Galerkin est choisie pour développer une solution au problème de CN dans une cavité carrée poreuse. L'application de la procédure de Fourier-Galerkin (FG), deux configurations traitant des régimes instables sont considérés où chaque solution est dérivée pour une large gamme des nombres de Rayleigh (Ra) avec d'autres conditions spéciales. Ce travail de thèse est subdivisé en cinq chapitres.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté un aperçu physique du processus de convection naturelle en milieux poreux modélisés mathématiquement par l'écoulement du fluide couplé au transfert de chaleur par l'équation de convection diffusion. Selon les lois de conservation de la masse et d'énergie, et différents modèles d'écoulement de fluide, les équations gouvernant ce problème ont été établies. Le processus thermique a été exprimé par l'équation de convection-diffusion dépendant du temps tandis que l'écoulement du fluide a été exprimé en utilisant la loi de Darcy pour les milieux poreux dense à faible perméabilité. Lorsque la perméabilité du milieu poreux est relativement élevée, la loi de Darcy a été exprimée en utilisant le modèle de Darcy-Lapwood-Brinkman. Ces équations sont considérées comme couplées dans un système d'équations utilisant la relation de la force de flottabilité. Le système d'équations obtenu n'admet pas de solution analytique du fait de sa non-linéarité. Ainsi, la solution semi-analytique est considérée comme une manière convenable de développer notre solution. Ce besoin met en évidence le rôle des solutions « benchmarking » (cas tests) dans la détection de la précision et l'efficacité des codes numériques et des modèles permettant de trouver une solution approximative à ce problème.

Dans le deuxième chapitre, le développement mathématique des équations, la méthode de résolution et la procédure de résolution sont décrits en détails. La méthode spectrale de résidus pondérés de type Galerkin est utilisée. Les applications de la procédure de Galerkin sur les équations du système nécessitent une nouvelle formulation pour éliminer le terme de pression. Dans la suite, pour les trois cas développés, nous appliquons un changement de variable du paramètre température afin d'obtenir des conditions aux limites périodiques, et la fonction courant et la température décalée ont été remplacées par des équations inconnues. De plus, sur la base des avantages importants de la série de Fourier en termes de degré de liberté de différentiabilité et de bonne convergence, nous avons sélectionné les modes trigonométriques de Fourier comme fonctions d'essai.
Le système résultant des équations couplées est traité en utilisant la procédure de type Galerkin en choisissant des fonctions de poids trigonométriques qui fournissent une intégration des dérivées spatiales avec une bonne précision. En utilisant les relations trigonométriques et les propriétés d'orthogonalité, nous

avons exprimé analytiquement les produits scalaires des fonctions courant de Fourier et de températures décalées avec leurs poids. La procédure de résolution FG conduit dans les trois cas d'étude à un système de résidus composé d'une équation linéaire ou équation algébrique différentielle non linéaire (DAE) couplée à une équation différentielle ordinaire non linéaire (ODE). Les systèmes obtenus sont finalement résolus en utilisant les méthodes appropriées avec des propriétés spéciales. Le domaine est choisi pour être simple, une cavité carrée remplie de milieux poreux saturés et soumis à un chauffage différentiel des murs verticaux. Le gradient de température constant sur la paroi chaude décrit le mode transitoire, tandis que la variation périodique sinusoïdale de la température décrit le régime instable. Enfin, la solution dans chaque cas est comparée aux solutions obtenues par résolution numérique du même problème à l'aide des éléments finis. Cette comparaison a confirmé la précision de la solution et l'efficacité de la méthode FG pour résoudre les problèmes de CN stables et dépendant du temps.

Dans le chapitre trois, nous avons développé en détails, la première étude de cas de cette thèse, la solution dépendante du temps de la convection naturelle dans une cavité carrée remplie de milieux poreux saturé utilisant le modèle de Darcy, pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh (Ra), et utilisant une approche de discrétisation spéciale pour détecter la précision et l'efficacité de cette première solution benchmark. Les régimes transitoires et instables sont considérés. Selon la procédure de la méthode spectrale de Fourier Galerkin, la série de Fourier tronquée à des niveaux définis a remplacé les fonctions courant et la température. Dans l'espace spectral, le système résultant d'équations différentielles ordinaires non linéaires a été résolu en utilisant différents ordres de la méthode de Range-Kutta. En comparant les résultats FG à une solution numérique par éléments finis, nous avons vérifié l'efficacité de calcul et précision de la solution proposée. Le problème a été développé pour trois valeurs moyennes du nombre de Rayleigh (Ra) correspondant à 10, 100 et 1000. Pour toutes les configurations, le changement de la valeur Ra et du coefficient du nombre de Fourier nécessaire (NFC) pour obtenir une solution FG convergente montre une relation proportionnelle significative. En général, dans le cas transitoire, en observant les lignes de courant, nous pouvons détecter un flux dans le sens de circulation des aiguilles d'une montre, accompagnée d'un mouvement lent dans la région centrale. Les distributions asymétriques dans les régions chaudes et froides du domaine ont été indiquées par les isothermes. Le régime instable montre un phénomène très important en inversant le mouvement de la chaleur dans la cavité pendant la variation sinusoïdale de la température de la paroi chaude. Le très bon accord de la solution de FG obtenue avec la solution éléments finis pour les deux régimes (transitoire et instable) permet de vérifier la précision et l'efficacité de calcul de notre solution ; elle peut donc être considérée comme des solutions benchmarking pour des problèmes de convection naturelle en milieux poreux dépendant du temps.
Dans le chapitre quatre, la deuxième étude de cas, le problème de variation temporelle de Darcy-Lapwood-Brinkman de CN dans une enceinte poreuse saturée carrée est étudié. Deux configurations dans les régimes instationnaire et transitoire sont considérées. Le problème est résolu en utilisant la méthode spectrale de Galerkin, alors que la série trigonométrique de Fourier a remplacé la fonction de température et de courant développée. Le système résultant des résidus non linéaires formés par deux équations DAE-ODE ont été résolus en utilisant la méthode BDF. Les solutions FG sont comparées aux résultats obtenus en utilisant une méthode des éléments finis. Le problème a été étudié pour Ra = 10^2, 10^3 et 10^4, et Da =10^{-1}, 10^{-3} et 10^{-5}. A partir de toutes les configurations obtenues, le nombre de Fourier requis pour déterminer la solution de Fourier Galerkin augmente de manière significative, lorsque le Ra augmente et que Da diminue. En général, pour le mode transitoire, dans la région du cœur de la cavité, l'écoulement montre un mouvement lent de circulation dans le sens des aiguilles d'une montre décrit par les contours des lignes de courant. Dans le domaine, les isothermes montrent une distribution asymétrique des régions chaude et froide. Le mode instationnaire décrit progressivement le comportement de l'écoulement et la distribution de température affectée par la variation de température sur la paroi chaude. Les solutions FG et FE dans les deux modes (transitoire et instable) montrent un très bon accord. La différence entre le NFC et le NE utilisés dans les deux simulations ont prouvé la bonne efficacité de notre méthode FG proposée. La consommation élevée de temps CPU et la limitation de la mémoire pendant la simulation éléments finis rend le modèle inefficace pour fournir cette solution précise, en particulier pour les cas des nombres de Rayleigh élevés et du mode instationnaire. Les résultats obtenus dans ce travail sont ainsi considérés comme des solutions benchmarking

de référence pour les problèmes de CN dépendant du temps utilisant le modèle Darcy-Lapwood-Brinkman dans un milieu poreux saturé.
Dans le chapitre cinq, pour la troisième et dernière étude de cas, les solutions dépendant du temps sont développées pour le problème de convection naturelle utilisant la loi de Darcy dans une cavité poreuse inclinée et considéré comme une étude complète sur les effets de l'inclinaison du domaine sur le processus physique du problème de convection libre dans deux modes: transitoire et instable. Le système d'équations résultant est résolu par la méthode Range-Kutta avec ordre variable. Trois configurations sont considérées pour étudier le processus physique à Ra = 10, 100 et 1000. Pour chaque configuration, la solution a été développée pour différents niveaux d'inclinaison en prenant $\phi = 0$, $\pi / 6$, $\pi / 5$, $\pi / 4$ et $\pi / 3$. Pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de nos solutions, les résultats ont été comparés par des résultats numériques obtenus en développant une autre solution FE pour le même problème. Les résultats ont montré d'excellents accords tant pour les isothermes que pour les lignes de courant.
L'ensemble des résultats de ce travail de thèse a donné lieu à une valorisation scientifique (voir ci-dessous).

Publications scientifiques

Articles scientifiques dans les revues internationales à comité de lecture

1. Fahs Amin, Alaeddin Malek,(2017) Spectral Fourier–Galerkin benchmark solution for natural convection in an inclined saturated porous medium, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 71:4, 372-395.
2. Amin Fahs, A. Zakeri & A. Wanko: Spectral time-dependent solutions for Darcy model of natural convection in a porous enclosure, Numerical Heat Transfer, Part B, (2019). DOI: 10.1080/10407790.2019.1665450.
3. Amin Fahs, A. Zakeri & A. Wanko: A global approach for the time dependent solution of natural convection in a tilted porous cavity, Numerical Heat Transfer, Part B, (2020). DOI: 10.1080/10407790.2020.1799590.
4. Amin Fahs, A. Zakeri & A. Wanko: Time-dependent solution for natural convection in a porous enclosure using the Darcy-Lapwood-Brinkman model, Journal of Mathematics and Computer in Simulation (2020). https://doi.org/10.1016/j.matcom.2020.10.012

Conférence Internationale

5. The 12th conference meeting " InterPore 2020: Spectral time-dependent solutions for natural convection in porous enclosure Content ". 12th annual Meeting. 31 August – 4 september 2020