FRIEDERICH Xavier
Directeur de thèse : CÔTE Raphaël
IRMA UMR 7501 - Université de Strasbourg

mars 2021

ED 269 - MSII

THESE DE MATHEMATIQUES - RESUME
Propriétés qualitatives des multi-solitons

Introduction

Les *solitons* sont des objets physiques non-linéaires qui se déplacent sans se déformer au cours du temps et qui apparaissent comme solutions particulières de certaines équations aux dérivées partielles, parmi lesquelles :

(NLS) (Schrödinger non-linéaire) $\partial_t u = i\big(\Delta u + f(|u|^2)u\big), \qquad u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x \longrightarrow \mathbb{C},$

(gKdV) (Korteweg-de Vries généralisée) $\partial_t u = -\partial_x\big(\partial_x^2 u + f(u)\big), \qquad u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \longrightarrow \mathbb{R},$

(NLKG) (Klein-Gordon non-linéaire) $\partial_{tt} u = \Delta u - u + f(u), \qquad u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x \longrightarrow \mathbb{R}.$

Pour chacune de ces équations, la fonction f correspond à une « non-linéarité » qui doit vérifier certaines hypothèses. Il s'agit notamment de garantir l'existence et l'unicité locale de solutions vérifiant une certaine condition initiale ainsi que l'existence de solutions stationnaires d'énergie minimale (les « ground states ») : ces dernières décroissent exponentiellement en espace et permettent d'obtenir, grâce aux propriétés d'invariance des équations, les solitons.

Construits à partir des solitons, les *multi-solitons* sont des solutions $u : t \longmapsto u(t)$ définies et continues pour t assez grand, à valeurs dans l'espace de Sobolev H^1 (qui correspond à l'espace physique d'énergie) et qui se comportent en temps long comme la somme de $N \geq 1$ solitons $R_1, \dots, R_N$ avec des vitesses deux à deux distinctes ; ainsi, un tel multi-soliton u vérifie

$$\lim_{t \to +\infty} \left\| u(t) - \sum_{k=1}^{N} R_k(t) \right\|_{H^1} = 0. \tag{1}$$

La thèse est consacrée aux propriétés des multi-solitons des équations aux dérivées partielles non-linéaires citées précédemment.

L'étude des multi-solitons est motivée par des résultats de décomposition en solitons pour des solutions de l'équation historique de Korteweg-de Vries ((gKdV) avec $f(u) = u^2$) et plus généralement par la conjecture de résolution en solitons selon laquelle toute solution générique d'une équation aux dérivées partielles non-linéaire dispersive focalisante se comporte en temps long comme une somme de solitons et d'un terme dispersif linéaire. On explore tout particulièrement les questions liées à l'existence, à l'unicité, aux propriétés de régularité des multi-solitons dans chacun des cas stable et instable (c'est-à-dire lorsque tous les solitons R_k sont orbitalement stables ou non) et on s'intéresse également à toute propriété dynamique visant à mieux comprendre le comportement de ces solutions.

Les résultats majeurs obtenus dans le cadre de cette thèse et qui ont conduit à la rédaction d'articles scientifiques sont les suivants :

(1) construction de multi-solitons réguliers pour (NLS), à valeurs dans des espaces de Sobolev H^s, où $s > 1$ est directement relié à la régularité de la non-linéarité f et preuve de l'unicité dans une classe à décroissance polynomiale pour les multi-solitons de (NLS) dans les cas stable et L^2-critique (voir [1]).

(2) mise au point d'une propriété de Liouville au voisinage des multi-solitons de (gKdV) à l'aide du concept de *non-dispersion* et caractérisation des multi-solitons dans les cas où (gKdV) est intégrable ($p = 2$ et $p = 3$) en termes de non-dispersion (voir [4]).

(3) obtention de propriétés liées à la vitesse de décroissance pondtuelle en espace des multi-solitons de (gKdV) (voir [2]).

(4) construction d'une famille à N paramètres de multi-solitons pour (NLKG) à décroissance exponentielle en temps, classification des multi-solitons à décroissance $\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec$\alpha > 3$ et classification générale au sens de (1) dans le cas où $N = 1$ (voir [3]).

Multi-solitons de (NLS)

Considérant K solitons $R_1, \ldots, R_K$ de (NLS) qui se déplacent à des vitesses deux à deux distinctes, il existe un multi-soliton u tel que la quantité $\left\|u(t) - \sum_{k=1}^K R_k(t)\right\|_{H^1}$ décroît exponentiellement en temps, cela respectivement dans les cas stable (travaux de Martel et Merle) et instable (travaux de Côte, Martel et Merle).

Plusieurs propriétés qualitatives des multi-solitons (par exemple la régularité, l'unicité ou non selon la valeur de p) ont été démontrées pour les équations de Korteweg-de Vries généralisées. En outre, la classification complète des multi-solitons pour (gKdV) a été dressée.

Un premier résultat important de cette thèse est lié à la régularité des multi-solitons de (NLS). En reprenant les démonstrations des théorèmes d'existence des multi-solitons à valeurs dans $H^1(\mathbb{R}^d)$ (avec décroissance exponentielle) et en adaptant les idées de Martel mises en œuvre pour (gKdV), nous construisons des multi-solitons u plus réguliers pour (NLS), c'est-à-dire continus à valeurs dans les espaces de Sobolev supérieurs $H^s(\mathbb{R}^d)$; l'exposant s est directement relié à la classe de régularité de $g : z \mapsto f(|z|^2)z$.

Plus précisément, sous l'hypothèse que g est de classe $\mathscr{C}^s$ avec $s > \frac{d}{2}$ et que ses dérivées partielles d'ordre $s+1$ sont localement bornées, nous montrons que les quantités $\left\|u(t) - \sum_{k=1}^K R_k(t)\right\|_{H^s}$ décroissent encore exponentiellement en temps. De plus, le taux de décroissance exponentielle associé peut être choisi indépendamment de s si l'on suppose g de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Notons que pour établir ce résultat de régularité, nous ne travaillons pas avec le multi-soliton déjà construit à valeurs dans $H^1(\mathbb{R}^d)$; la construction proposée, valable dans chacun des cas stable et instable, se fait par approximation. Il s'agit de définir une suite adéquate de solutions u_n de (NLS) et d'obtenir un contrôle des quantités $\left\|u_n(t) - \sum_{k=1}^K R_k(t)\right\|_{H^s}$ par une exponentielle décroissante, ceci de façon indépendante de l'indice n de la suite. Pour cela, nous mettons en place une récurrence sur l'indice s de régularité de g. La preuve qui prend la même forme en toute dimension d s'appuie en outre sur des outils mathématiques comme les inégalités de Hölder, les théorèmes d'injection de Sobolev et, plus généralement, sur les inégalités d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg.

Par ailleurs, nous obtenons également un résultat d'unicité pour les multi-solitons de (NLS). Dans les cas stable et L^2-critique (ce dernier correspond au cas où $f : x \longmapsto x^{\frac{2}{d}}$), étant donnés K solitons $R_1, \ldots, R_K$, on montre sous des hypothèses assez naturelles que, pour $T \geq 0$ assez grand, il existe un unique multi-soliton u défini à partir du temps T tel que $\left\|u(t) - \sum_{k=1}^K R_k(t)\right\|_{H^1}$ décroît plus vite que n'importe quelle puissance de $\frac{1}{t}$.

Ce résultat s'appuie sur le précédent, au moins en dimension $d \geq 2$, dans la mesure où l'on utilise la régularité du multi-soliton construit. Il est, comme le résultat d'existence, fondé sur la considération des opérateurs linéarisés autour des états fondamentaux et leurs propriétés de coercivité sous réserve que certaines conditions d'orthogonalité soient vérifiées.

Nous soulignons que ce résultat d'unicité implique que le multi-soliton régulier construit à valeurs dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ coïncide avec celui de Martel et Merle et de Côte, Martel et Merle, ce qui n'est pas évident d'emblée.

Néanmoins, pour l'heure, nous ne parvenons pas à obtenir l'unicité dans une classe de multi-solitons plus large ; il est probable que ce résultat d'unicité s'étende au cadre le plus général, c'est-à-dire soit valable au sens de (1), mais c'est encore une conjecture à ce jour. Cela s'explique sans doute par le manque de propriétés de « monotonie » pour des fonctionnelles de type « énergie localisée au voisinage des solitons » des solutions des équations de Schrödinger non-linéaires. Au contraire, pour les équations de Korteweg-de Vries généralisées unidimensionnelles et à valeurs réelles, de telles propriétés de monotonie existent et permettent de se ramener au cadre de la classe des multi-solitons à décroissance exponentielle et en finalité d'obtenir l'unicité au sens de (1).

Un article [1] s'attachant à l'énoncé et à la preuve de ces résultats de régularité et d'unicité pour (NLS) a été rédigé et soumis pour publication.

Multi-soltions de (gKdV)

Nous énoncons et démontrons une propriété de rigidité de type Liouville au voisinage d'un multi-soliton pour les solutions de (gKdV). Essentiellement, si une solution $u \in \mathscr{C}\left([0,+\infty), H^1(\mathbb{R})\right)$ de (gKdV) est non-dispersive au sens où il existe $\rho > 0$ tel que

$$\sup_{t\geq 0} \int_{x<\rho t-R} u^2(t,x)\, dx \underset{R\to+\infty}{\to} 0, \tag{2}$$

et si pour tout temps $t \geq 0$, $u(t)$ est suffisamment proche d'une somme de solitons découplés, alors u est un multi-soliton.

Ce résultat permet d'étendre au cadre des multi-solitons et d'affiner une propriété de rigidité développée par Martel et Merle qui concene uniquement les solitons.

Dans le cas spécifique de l'équation de Korteweg-de Vries (KdV), la propriété de non-dispersion (2) caractérise complètement les multi-solitons au sein des solutions $u \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$ non-identiquement nulles, ce qui est tout à fait remarquable. Dans le cas de la non-linéarité cubique $f(u) = u^3$ - on parle alors de l'équation de Korteweg-de Vries modifiée (mKdV) - il est intéressant d'observer que la propriété précédente caractérise de façon générique les multi-breathers. Ces derniers sont définis de façon analogue aux multi-solitons ; simplement on doit considérer dans ce cadre des sommes de solitons et de breathers (qui sont d'autres solutions explicites particulières à (mKdV), périodiques en temps, localisées en espace et qui jouent également un rôle important pour répondre à la conjecture de résolution en solitons pour cette équation).

L'hypothèse de non-dispersion (2) est essentielle dans notre preuve pour obtenir de la régularité sur u et de la décroissance exponentielle en espace sur toutes ses dérivées dans une région de la forme $x < \beta t$. La seconde hypothèse de proximité par rapport à une somme de solitons permet de contrôler u sur une région de la forme $x > \beta t$, via une propriété de stabilité asymptotique démontrée par Martel et Merle et Martel, Merle et Tsai.

Le résultat de rigidité que nous développons est aussi intéressant dans la mesure où l'énoncé et sa démonstration permettent de faire un certain nombre de liens avec d'autres articles qui ont été publiés jusqu'à présent au sujet des solitons et des multi-solitons de (gKdV). Notre article [4] fait l'objet d'une publication dans les *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non-linéaire*.

Beaucoup de résultats sont à présent connus à propos des multi-solitons de (gKdV). On sait les construire, donner leur régularité, les classifier, on possède des résultats de stabilité et de stabilité asymptotique, et nous parvenons également dans cette thèse à caractériser de façon dynamique ces objets.

Mais d'autres questions liées à leurs propriétés demeurent encore sans réponse. Qu'en est-il du comportement ponctuel de ces solutions, à t fixé, par exemple ? Peut-on obtenir pour un multi-soliton u associé à des solitons R_i, $i = 1, \dots, N$ se propageant à des vitesses $c_1 < \cdots < c_N$ une estimation de la forme

$$|u(t,x)| \leq C \sum_{i=1}^{N} e^{-\gamma|x-c_i t|}\ , \tag{3}$$

de même que pour la somme de solitons $\sum_{i=1}^{N} R_i$?

En fait, nous pouvons affirmer que c'est toujours le cas sur toute région de la forme $x \leq \beta t$, où $\beta > 0$ (avec γ qui dépend de β). La décroissance exponentielle des multi-solitons de (gKdV) à gauche de la première onde solitaire est liée au caractère non-dispersif des multi-solitons sur une telle région et découle ainsi d'un argument de monotonie similaire à celui que nous mettons en œuvre pour démontrer notre propriété de Liouville. La décroissance exponentielle en temps de $\left\|u(t) - \sum_{i=1}^{N} R_i(t)\right\|_{H^1}$ étend ce résultat à $x < \beta t$ si $\beta > c_N$. Enfin à droite, sur une région de la forme $x > \beta t$, nous obtenons en toute généralité une décroissance plus rapide que tout polynôme pour chacune des dérivées du multi-soliton, cela à partir des estimées de convergence exponentielle en temps pour toutes les normes H^s. En particulier, il résulte que les multi-solitons appartiennent à l'espace de Schwartz. En outre, lorsque le multi-soliton est global (notamment dans le cas L^2-sous-critique, c'est-à-dire lorsque $1 < p < 5$), nous pouvons mettre en place l'argument de monotonie précédent ; il s'ensuit également

une décroissance exponentielle en espace à droite de la dernière onde solitaire. En revanche, il semble plus délicat de montrer que les éventuels multi-solitons qui ne sont pas définis pour tout temps $t \in \mathbb{R}$ décroissent à vitesse exponentielle en espace à droite car l'argument de monotonie ne s'applique *a priori* plus dans ce cadre.

L'article [2] qui se focalise sur la décroissance ponctuelle pour les multi-solitons de (gKdV) sera soumis prochainement pour publication.

Multi-solitons de (NLKG)

La première construction d'un multi-soliton pour l'équation (NLKG) est due à Côte et Muñoz ; elle repose sur des méthodes usuelles de compacité et d'énergie qui peuvent être mises en pratique grâce aux propriétés spectrales des opérateurs linéarisés autour des solitons.

Intéressés par la dynamique en temps long de solutions de l'équation (NLKG) au voisinage de solitons (lesquels sont instables dans ce contexte) et de somme de solitons, nous démontrons l'existence d'une famille à N paramètres de multi-solitons. Pour cela, nous adaptons à (NLKG) la construction effectuée par Combet dans le cadre des équations (gKdV) et (NLS). Intuitivement, les N opérateurs linéarisés autour des solitons gouvernent chacun une direction d'instabilité, générant une infinité de possibilités pour perturber un multi-soliton en un multi-soliton différent. La preuve s'appuie sur un argument topologique établi originellement par Côte, Martel et Merle et sur la bonne connaissance des opérateurs linéarisés autour des « ground states ». Nous utilisons en effet les notations introduites par Côte et Muñoz ainsi que la théorie spectrale contenue dans leur article.

En ce qui concerne la question de la classification, nous montrons réciproquement que cette famille à N paramètres de multi-solitons est unique en restriction à la classe des solutions u telles que $\left\|u(t) - \sum_{k=1}^{N} R_k(t)\right\|_{H^1} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ où $\alpha > 3$. Cette propriété d'unicité est obtenue grâce à la presque-monotonie d'une fonctionnelle bien choisie, inspirée de Martel et Merle pour l'étude de l'équation des ondes H^1-critique.

Lorsqu'un seul soliton est considéré, nous obtenons une caractérisation complète des solutions qui convergent vers ce soliton lorsque $t \to +\infty$: ces solutions constituent exactement la famille à 1 paramètre de solutions que nous construisons.

Ces résultats concernant les multi-solitons de (NLKG) sont présentés plus précisément dans l'article [3].

Références - Travaux effectués durant la thèse

[1] R. Côte, X. Friederich, *On smoothness and uniqueness of multi-solitons of the non-linear Schrödinger equations*, Preprint, (2020), https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02873307.

[2] R. Côte, X. Friederich, *Pointwise decay of the multi-solitons of the generalized Korteweg-de Vries equation*, Preprint, (2021).

[3] X. Friederich, *Asymptotic N-soliton-like solutions of the nonlinear Klein-Gordon equation*, Preprint, (2021).

[4] X. Friederich, *Non dispersive solutions of the generalized Korteweg-de Vries equations are typically multi-solitons*, Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire, In press, (2021), https ://doi.org/10.1016/j.anihpc.2020.11.010.

Communications

— Exposé lors du séminaire « Analyse » à l'IRMA, Strasbourg, le 2 avril 2019,
Multi-solitons des équations de Schrödinger non-linéaires.

— Exposé en visioconférence lors du séminaire « Analyse » de l'IRMA, Strasbourg, le 9 février 2021,
Solutions non-dispersives des équations de Korteweg-de Vries généralisées.