Some contributions to quantitative risk management

Cette thèse s'articule autour de deux parties différentes qui contribuent à la gestion quantitative des risques financiers, particulièrement dans la modélisation du risque de crédit et la quantification de l'incertitude des risques financiers. La première partie traite de la modélisation des temps de défaut en risque de crédit, tandis que la seconde porte sur la construction de surfaces de volatilité à l'aide du krigeage.

Partie 1: Modèles de temps de défaut

Dans la littérature du risque de crédit, la modélisation du temps de défaut repose essentiellement sur deux approches fondamentales à savoir l'approche structurelle et l'approche à forme réduite. La principale différence entre ces deux approches est le choix de la filtration. Dans l'approche structurelle (voir Merton, 1974), l'information est modélisée par une filtration $\mathbb{F}$ dans laquelle le temps de défaut est un temps d'arrêt qui peut être prévisible ou totalement inaccessible (dans ce cas, il est nécessaire de calculer son compensateur). Tandis que, dans l'approche à forme réduite (voir Duffie, Schroder, and Skiadas, 1996; Lando, 1995), on commence par une filtration de référence $\mathbb{F}$ dans laquelle le temps de défaut τ n'est pas un temps d'arrêt et on la grossit progressivement avec τ pour obtenir une filtration $\mathbb{G}$. La théorie de grossissement de filtration remonte aux années 70-80 suite aux travaux d'Itô (1978), Barlow (1978), Jacod (1985), Jeulin and Yor (1978), Yor (1978) et s'applique dans plusieurs domaines notamment en finance et en assurance.

Très souvent, la construction des modèles de défaut dans l'approche à forme réduite conduit à des temps de défauts qui évitent les temps d'arrêt de la filtration de référence $\mathbb{F}$. Ce qui fait que ces modèles deviennent inefficaces quand il s'agit de modéliser certains produits financiers soumis au défaut en présence de chocs économiques lorsque le temps de défaut τ peut être égal, avec une probabilité strictement positive, à l'un des instants d'événement de chocs qui sont des temps d'arrêt de la filtration de référence. Ceci pousse certains auteurs à s'intéresser récemment au cas où cette hypothèse est omise, en utilisant des modèles dits hybrides. Par exemple, Gehmlich and Schmidt (2018) et Fontana and Schmidt (2018) n'utilisent pas le grossissement de filtration et considèrent un modèle où le temps de défaut est un temps d'arrêt par rapport à une filtration $\mathbb{G}$ qui n'évite pas les $\mathbb{G}$-temps d'arrêt prévisibles. Dans leur travail, ils supposent l'existence du compensateur du défaut qui peut être décomposé en une partie absolument continue et un saut pur (prévisible). Mais ils ne font aucune construction du temps d'arrêt associé.
Dans cet ordre d'idées, Jiao and Li (2018) ont élaboré un modèle selon lequel le temps de défaut peut coïncider avec des instants de chocs économiques prévisibles. Ils s'intéressent au compensateur du temps de défaut en utilisant l'approche de densité généralisée et montrent que le processus de taux d'intensité n'existe pas dans leur cadre. En outre, leur modèle permet de capter les sauts de prix des obligations zéro-coupon soumises au défaut ainsi que ceux des spreads correspondants.

Un des objectifs de cette thèse est d'étendre le modèle de Jiao and Li (2018) dans le cas où les instants de chocs ne sont pas prévisibles. Malgré son attractivité dans la modélisation des produits financiers soumis au défaut en présence de chocs économiques prévisibles, le modèle de Jiao and Li (2018) est difficile à mettre en œuvre si les chocs ne sont pas prévisibles (i.e., ces chocs apparaissent par surprise) et ne permettent pas toujours de capter les sauts de prix des obligations zéro-coupon.

Pour modéliser les produits financiers soumis au défaut en présence de chocs économiques qui ne sont pas prévisibles, nous proposons ce que nous appelons le modèle de Cox généralisé qui étend celui de Lando (1998) dans lequel le temps de défaut τ est le premier instant où un processus K croissant adapté à une

filtration donnée (la filtration de référence) $\mathbb{F}$, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue passe par une barrière stochastique Θ indépendante de $\mathbb{F}$. Il s'ensuit que ce temps de défaut évite tous les temps d'arrêt dans la filtration de référence $\mathbb{F}$. Nous assouplissons l'hypothèse selon laquelle le processus croissant K est absolument continu. Ici, nous travaillons dans un cadre plus général, ce processus K étant adapté, croissant et continu à droite avec des limites à gauche ou continu à gauche avec des limites à droite. Cela nous conduit à un temps aléatoire qui n'évite pas les temps d'arrêt de $\mathbb{F}$. Dans les deux cas, nous nous intéressons aux caractéristiques du temps de défaut comme la martingale de survie conditionnelle, la supermartingale Azéma, le compensateur du temps de défaut ainsi que son processus de réduction prévisible et la décomposition multiplicative de la supermartingale d'Azéma. Nous étudions également l'existence de densités conditionnelles dans le sens de Jacod (1985) que nous dénotons (CL), dans le sens de Jiao and Li (2015), dénoté par (GD) et l'hypothèse étendue de Jacod introduite dans Li and Rutkowski (2014).
On peut trouver une première tentative de généralisation dans Bélanger, Shreve, and Wong (2004), où le processus croissant est prévisible et continu à droite.
Contrairement au modèle de Jiao and Li (2018), dans le modèle généralisé de Cox, le processus de taux d'intensité peut exister.

Partie 2: Le krigeage : une approche innovante pour la gestion des risques financiers

Les surfaces de volatilité constituent des outils importants en gestion des risques conçus pour la tarification et la couverture des produits dérivés financiers. Elles permettent par exemple d'estimer, à partir du prix d'options liquides, la valeur des produits financiers dont les caractéristiques sont non standards et dont le prix n'est pas observé sur le marché. La volatilité dépend des caractéristiques contractuelles de l'option (nature de l'actif sous-jacent, maturité, prix d'exercice) et n'est observée que pour un nombre limité de caractéristiques standard (couple maturité - prix d'exercice) et peut nécessiter la surface entière de prix ou le prix de certaines caractéristiques non observées pour certaines applications. En outre, la construction de ces surfaces est habituellement faite en respectant le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage, i.e., les prix des options obtenus à partir de ces surfaces ne permettent pas de réaliser d'arbitrage financier. La construction d'une surface de prix sans arbitrage peut être transformée en un problème d'apprentissage fonctionnel avec des contraintes de forme et éventuellement des observations brutées.
Une fois la surface des prix interpolée, l'obtention de l'ensemble des surfaces de volatilité peut se faire à travers des approches numériques. À cet égard, nous pouvons utiliser la formule d'inversion de tout modèle sans arbitrage, tel que celui de Black-Scholes (voir Black and Scholes, 1973), par le biais d'approches numériques, pour obtenir la surface de volatilité implicite. Nous pouvons utiliser une approximation de la formule de Dupire (voir Dupire, 1994) par méthode de différences finies pour déterminer la surface de volatilité locale. Par ailleurs, il existe des approches directes telles que les SVI qui paramètrent le smile de volatilité implicite et son extension (SSVI) pour la surface de volatilité implicite (voir Gatheral and Jacquier, 2014; Gatheral, 2004).

Une autre approche indirecte pour construire la surface de volatilité locale est l'utilisation de la surface de volatilité implicite plutôt que celle des prix. Il s'agit d'extraire la surface de volatilité locale de celle de volatilité implicite à l'aide de la formule (1.10) de Gatheral (2011).

Les techniques utilisées habituellement dans les approches indirectes reposent sur des splines contraintes (voir par exemple Fengler, 2009; Homescu, 2011; Laurini, 2011; Wang, Yin, and Qi, 2004, etc.).
Récemment, des techniques de réseaux de neuronnes ont été adoptées pour combler le vide dans les modèles habituels en enregistrant de meilleures performances de surface de prix sans arbitrage. Le travail de Dugas et al. (2009) est le point de départ de l'intégration de contraintes sans arbitrage dans les réseaux de neurones pour l'apprentissage des prix des options. Dugas et al. (2009) ont utilisé les contraintes dites hard à travers une architecture spéciale. Cette approche est différente de celle appelée approche par contraintes soft qui consiste à pénaliser certaines variables, dans la fonction objective, qui ne vérifient pas les contraintes (voir, par exemple, Itkin, 2019). La principale difficulté de l'approche de Dugas et al. (2009) s'appuie sur le fait, qu'en pratique, l'incorporation de contraintes hard dans les réseaux neuronaux réduit leur flexibilité

et présente une transformation hautement non linéaire pour le calcul de prix des options à chaque itération comme le montrent Ackerer, Tagasovska, and Vatter (2019), qui selon eux, les contraintes hard de Dugas sur les prix font perdre trop de précisions. Ainsi, pour la construction de la surface de volatilité locale, ces derniers ont proposé d'utiliser directement la surface de volatilité implicite au lieu de la surface de prix en appliquant l'approche soft. Chataigner, Crépey, and Dixon (2020) ont proposé des architectures de réseaux de neurones simples pour les prix des options d'arbitrage et la volatilité implicite. Ils montrent que les contraintes hard réduisent la puissance du réseau et que les contraintes soft fournissent les meilleurs prix précis et les volatilités implicites.

L'objectif de cette partie est d'adopter les techniques de krigeage contraintes développées dans Maatouk and Bay (2017) afin de quantifier l'incertitude associée à la construction de surfaces de volatilité (telles que la volatilité implicite et la surface de volatilité locale) dans un cadre qui respecte les conditions d'absence d'opportunités d'arbitrage. Nous utilisons les approches indirectes qui consistent à apprendre les prix par le krigeage et ensuite utiliser la formule d'inversion en terme de surface de volatilité implicite et calibrer Dupire en terme de volatilité locale. Il n'est pas nécessaire d'étendre l'approche de Maatouk and Bay (2017) pour des contraintes d'inégalité plus générales, comme cela a été fait dans López-Lopera et al. (2018), puisque nous nous limitons aux contraintes de convexité et de monotonie.
L'idée est de supposer que la distribution du processus sous-jacent (le modèle) est une réalisation d'un champ gaussien tronqué, vérifiant certaines contraintes. Comme pour les courbes de taux (voir Cousin, Maatouk, and Rullière, 2016), les contraintes de compatibilité avec les observations de marché (compatibilité aux prix des options européennes) se traduisent sous forme d'une relation linéaire sur le processus de krigeage. L'hypothèse d'absence d'arbitrages est équivalente à l'existence d'une mesure martingale : les réalisations du processus de krigeage doivent correspondre à des distributions marginales de martingales. D'après le Th. 2.6 de Beiglböck, Juillet, et al. (2016), il s'agit alors de construire une famille de distributions marginales à partir d'un processus gaussien bivarié qui est :

- croissante par rapport à la direction des maturités,
- convexe par rapport à la direction des strikes,
- solution d'une relation linéaire sur certaines maturités et strikes.

Le krigeage (ou la regression par processus de Gauss) est une technique de géostatistique initialement introduite pour estimer la densité de minerais dans une zone pré-définie de l'espace, étant donné quelques observations issues d'expériences de forage à des points particuliers du sol. Le principe du krigeage repose sur la détermination de la distribution conditionnelle d'un champ aléatoire gaussien connaissant les valeurs de ce champ à certains points de l'espace, appelés points d'expérience (voir par exemple, Matheron, 1963; Cressie, 1990; Krige and Magri, 1982). Le principal intérêt de cette approche est qu'elle permet d'estimer les valeurs de la variable de référence à d'autres points de l'espace en quantifiant l'incertitude associée à cette estimation. Par ailleurs, dans un contexte où les observations sont coûteuses à obtenir, le plan d'expérience (points du support où la variable d'intérêt est observée) peut être conçu de manière adaptative (voir Williams and Rasmussen, 2006). Cette technique a rapidement gagné en popularité suite aux travaux de Williams and Rasmussen (2006) et a été adaptée dans divers domaines tels que l'hydrologie, la météorologie ou l'épidémiologie, ect. Quelques travaux ont été récemment développés en sciences actuarielles. Ces derniers incluent celui de Sousa, Esquível, and Gaspar (2012) pour l'étalonnage du modèle de Vasicek, le travail d'Asgharian, Hess, and Liu (2013) dans l'analyse des liens avec le marché boursier, l'article de Dixon and Crépey (2018) dans la modélisation de portefeuilles de dérivés, Machine learning pour la finance quantitative de De Spiegeleer et al. (2018), le papier de Ludkovski, Risk, and Zail (2018) dans la modélisation du taux de mortalité, celui de Ludkovski (2018) dans la valorisation de l'option bermuda, celui de Tegnér and Roberts (2019) pour la volatilité locale, les travaux de Gonzalvez et al. (2019) sur les applications des processus gaussiens et l'optimisation bayésienne en finance.

Une première tentative d'utilisation du krigeage pour la volatilité locale est effectuée par Tegnér and Roberts (2019) qui placent un prior gaussien directement sur la surface de volatilité locale (pour garantir la positivité de la volatilité locale, ils attribuent une fonction positive sur le prior). Une telle approche conduit à une fonction de perte des moindres carrés non linéaires, car elle implique la transformation non linéaire de la volatilité locale en prix d'option vanille correspondants. Une telle fonction de perte n'est pas

notoirement favorable à la descente de gradient (stochastique ou non), de sorte que les auteurs recourent à une optimisation MCMC. De plus, la performance de leur GPs est mesuré par RMSE en échantillon et ne semble pas être évalué pour le surapprentissage. En outre, ils ne comparent pas leur approche aux alternatives.
En fait, ajouter une telle contrainte de positivité ainsi que d'autres contraintes d'inégalité linéaire (telles que la monotonie, la convexité, les bornes) dans le krigeage n'est pas une tâche facile et constitue un grand défi. À cette fin, certains auteurs se sont récemment penchés sur cette question, connue sous le nom de krigeage contraint ou de régression par processus de Gauss (GPs) contraints. Les cadres présentés dans Da Veiga and Marrel (2012), Golchi et al. (2015), Riihimäki and Vehtari (2010), and Wang and Berger (2016), entre autres, utilisent une subdivision de l'espace d'entrée. Cependant, ils se basent sur le fait que les contraintes ne sont satisfaites que sur des observations virtuelles et ne garantissent pas les contraintes dans l'ensemble du domaine. Par exemple, pour intégrer la contrainte de monotonie croissante dans le krigeage, Wang and Berger (2016) ont proposé de sélectionner les localisations avec de fortes probabilités d'avoir des dérivées négatives comme les localisations virtuelles dans lesquelles ils forcent les contraintes. L'approche d'Agrell (2019) est une extension de celle de Wang and Berger (2016) pour des contraintes multiples grâce à une méthode efficace de simulation du processus à postériori basé sur la dérivation de processus gaussien contraint à l'aide d'un opérateur linéaire.

Lorsqu'on ajoute des contraintes d'inégalité dans les quantités d'intérêt, le processus à postériori n'est plus gaussien et que ces contraintes sont habituellement infini-dimensionnelles. C'est ce qui a motivé Maatouk and Bay (2014) à utiliser l'approximation fini-dimensionnelle des processus gaussiens pour lesquels les contraintes d'inégalité sont faciles à vérifier. Ils ont développé un schéma appelé rejection autour du mode (RSM) pour la simulation de la distribution gaussienne multivariée tronquée nécessaire à l'estimation du processus à postériori. Leur approche garantit les contraintes dans le domaine entier. Cousin, Maatouk, and Rullière (2016) montrent les extensions de l'interpolation spline classique par des techniques de krigeage contraintes mises au point dans Maatouk and Bay (2014) pour assurer l'interpolation des courbes CDS et des courbes non arbitrables et de contrôle des erreurs. López-Lopera et al. (2018) ont étendu le cadre de Maatouk and Bay (2014) pour des contraintes d'inégalité plus générales et ont proposé d'utiliser la méthode de Monte Carlo Hamiltonienne (HMC) de Pakman and Paninski (2014) qui est plus efficace que le rejet autour du mode de Maatouk and Bay (2014) pour la simulation du processus à posteriori.

Contrairement à l'interpolation par splines, et aux approches SSVI et réseau de neurones, le krigeage permet de quantifier l'incertitude dans l'estimation des variables d'intérêt. Il est possible par exemple d'obtenir des intervalles de confiance aux points de la surface où les observations sont indisponibles ou considérées comme peu fiables.

La principale contribution de cette partie de la thèse est de montrer que le krigeage est un outil approprié pour construire des prix d'option et pour quantifier l'incertitude dans l'estimation de la volatilité locale et implicite. Une attention particulière sera accordée à la simulation des coefficients aléatoires gaussiens lorsque certaines contraintes de monotonie seront saturées et nous proposerons une solution numérique à ce problème.

Publications et prépublications

- A. Cousin, S. Crepey, M.F. Dixon, and D. Gueye, Beyond Surrogate Modeling: Learning the Local Volatility Via Shape Constraints, under review, 2020.
- A. Cousin, D. Gueye, Kriging for implied volatility surface, working paper.
- Gueye, Djibril, Monique Jeanblanc, and Libo Li (2019). "Models of default times and cox model revisited".In:Freiburg FRIAS: Finance and Insurance.

Présentations

Les travaux sur le krigeage ont été présentés en juillet 2019 à AIMS-Sénégal à l'occasion de la 1ère école d'été en Statistique et Science des Données pour les jeunes chercheurs d'Afrique francophone.

Bibliography

Ackerer, Damien, Natasa Tagasovska, and Thibault Vatter (2019). "Deep smoothing of the implied volatility surface". In: *Available at SSRN 3402942*.

Agrell, Christian (2019). "Gaussian processes with linear operator inequality constraints". In: *arXiv preprint arXiv:1901.03134*.

Asgharian, Hossein, Wolfgang Hess, and Lu Liu (2013). "A spatial analysis of international stock market linkages". In: *Journal of Banking & Finance* 37.12, pp. 4738–4754.

Barlow, Martin T (1978). "Study of a filtration expanded to include an honest time". In: *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 44.4, pp. 307–323.

Beiglböck, Mathias, Nicolas Juillet, et al. (2016). "On a problem of optimal transport under marginal martingale constraints". In: *The Annals of Probability* 44.1, pp. 42–106.

Bélanger, Alain, Steven E. Shreve, and Dennis Wong (2004). "A general framework for pricing credit risk". In: *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics* 14.3, pp. 317–350.

Black, Fischer and Myron Scholes (1973). "The pricing of options and corporate liabilities". In: *Journal of political economy* 81.3, pp. 637–654.

Chataigner, Marc, Stéphane Crépey, and Matthew Dixon (2020). "Deep Local Volatility". In: *Risks* 8.3, p. 82. URL: http://dx.doi.org/10.3390/risks80300.

Cousin, Areski, Hassan Maatouk, and Didier Rullière (2016). "Kriging of financial term-structures". In: *European J. Oper. Res.* 255.2, pp. 631–648. ISSN: 0377-2217. DOI: 10.1016/j.ejor.2016.05.057. URL: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.05.057.

Cressie, Noel (1990). "The origins of kriging". In: *Math. Geol.* 22.3, pp. 239–252. ISSN: 0882-8121. DOI: 10.1007/BF00889887. URL: https://doi.org/10.1007/BF00889887.

Da Veiga, Sébastien and Amandine Marrel (2012). "Gaussian process modeling with inequality constraints". In: *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*. Vol. 21. 3, pp. 529–555.

De Spiegeleer, Jan, Dilip B Madan, Sofie Reyners, and Wim Schoutens (2018). "Machine learning for quantitative finance: fast derivative pricing, hedging and fitting". In: *Quantitative Finance* 18.10, pp. 1635–1643.

Dixon, Matthew F and Stéphane Crépey (2018). "Multivariate Gaussian Process Regression for Derivative Portfolio Modeling: Application to CVA". In:

Duffie, Darrell, Mark Schroder, and Costis Skiadas (1996). "Recursive valuation of defaultable securities and the timing of resolution of uncertainty". In: *The Annals of Applied Probability* 6.4, pp. 1075–1090.

Dugas, Charles, Yoshua Bengio, François Bélisle, Claude Nadeau, and René Garcia (2009). "Incorporating functional knowledge in neural networks". In: *Journal of Machine Learning Research* 10.Jun, pp. 1239–1262.

Dupire, Bruno (1994). "Pricing with a smile". In: *Risk* 7.1, pp. 18–20.

Fengler, Matthias R (2009). "Arbitrage-free smoothing of the implied volatility surface". In: *Quantitative Finance* 9.4, pp. 417–428.

Fontana, Claudio and Thorsten Schmidt (2018). "General dynamic term structures under default risk". In: *Stochastic Processes and their Applications* 128.10, pp. 3353–3386.

Gatheral, Jim (2004). "A parsimonious arbitrage-free implied volatility parameterization with application to the valuation of volatility derivatives". In: *Presentation at Global Derivatives & Risk Management, Madrid*, p. 0.

— (2011). *The volatility surface: a practitioner's guide*. Vol. 357. John Wiley & Sons.

Gatheral, Jim and Antoine Jacquier (2014). "Arbitrage-free SVI volatility surfaces". In: *Quantitative Finance* 14.1, pp. 59–71.

Gehmlich, Frank and Thorsten Schmidt (2018). "Dynamic defaultable term structure modeling beyond the intensity paradigm". In: *Mathematical Finance* 28.1, pp. 211–239.

Golchi, Shirin, Derek R Bingham, Hugh Chipman, and David A Campbell (2015). "Monotone emulation of computer experiments". In: *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification* 3.1, pp. 370–392.

Gonzalvez, Joan, Edmond Lezmi, Thierry Roncalli, and Jiali Xu (2019). "Financial applications of Gaussian processes and Bayesian optimization". In: *arXiv preprint arXiv:1903.04841*.

Homescu, Cristian (2011). "Implied volatility surface: Construction methodologies and characteristics". In: *Available at SSRN 1882567*.

Itkin, Andrey (2019). "Deep learning calibration of option pricing models: some pitfalls and solutions". In: *arXiv preprint arXiv:1906.03507*.

Itô, Kiyosi (1978). "Extension of stochastic integrals". In: *Proc. Internat. Symp. Stoch. Diff. Equations (Res. Inst. Mathemat. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976)*. Wiley.

Jacod, Jean (1985). "Grossissement initial, hypothèse H' et théorème de Girsanov". In: *Grossissements de filtrations: exemples et applications*. Springer, pp. 15–35.

Jeulin, Thierry and Marc Yor (1978). "Grossissement d'une filtration et semi-martingales: formules explicites". In: *Séminaire de Probabilités XII*. Springer, pp. 78–97.

Jiao, Ying and Shanqiu Li (2015). "Generalized density approach in progressive enlargement of filtrations". In: *Electronic Journal of Probability* 20.

— (2018). "Modeling sovereign risks: From a hybrid model to the generalized density approach". In: *Mathematical Finance* 28.1, pp. 240–267.

Krige, Daniel G. and Eduardo J. Magri (1982). "Geostatistical case studies of the advantages of lognormal-de Wijsian Kriging with mean for a base metal mine and a gold mine". In: *J. Internat. Assoc. Math. Geol.* 14.6, pp. 547–555. ISSN: 0020-5958. DOI: 10.1007/BF01033878. URL: https://doi.org/10.1007/BF01033878.

Lando, David (1995). "Three essays on contingent claims pricing". PhD thesis.

— (1998). "On Cox processes and credit risky securities". In: *Review of Derivatives research* 2.2-3, pp. 99–120.

Laurini, Márcio Poletti (2011). "Imposing no-arbitrage conditions in implied volatilities using constrained smoothing splines". In: *Applied Stochastic Models in Business and Industry* 27.6, pp. 649–659.

Li, Libo and Marek Rutkowski (2014). "Progressive enlargements of filtrations with pseudo-honest times". In: *The Annals of Applied Probability* 24.4, pp. 1509–1553.

López-Lopera, Andrés F, François Bachoc, Nicolas Durrande, and Olivier Roustant (2018). "Finite-dimensional Gaussian approximation with linear inequality constraints". In: *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification* 6.3, pp. 1224–1255.

Ludkovski, Michael (2018). "Kriging metamodels and experimental design for Bermudan option pricing". In:

Ludkovski, Mike, Jimmy Risk, and Howard Zail (2018). "Gaussian process models for mortality rates and improvement factors". In: *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA* 48.3, pp. 1307–1347.

Maatouk, Hassan and Xavier Bay (2014). *Gaussian Process Emulators for Computer Experiments with Inequality Constraints. hal-01096751*.

— (2017). "Gaussian process emulators for computer experiments with inequality constraints". In: *Mathematical Geosciences* 49.5, pp. 557–582.

Matheron, Georges (1963). "Principles of geostatistics". In: *Economic geology* 58.8, pp. 1246–1266.

Merton, Robert C. (1974). "On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates". In: *The Journal of finance* 29.2, pp. 449–470.

Pakman, Ari and Liam Paninski (2014). "Exact hamiltonian monte carlo for truncated multivariate gaussians". In: *Journal of Computational and Graphical Statistics* 23.2, pp. 518–542.

Riihimäki, Jaakko and Aki Vehtari (2010). "Gaussian processes with monotonicity information". In: *Proceedings of the thirteenth international conference on artificial intelligence and statistics*, pp. 645–652.

Sousa, J Beleza, Manuel L Esquível, and Raquel M Gaspar (2012). "Machine learning Vasicek model calibration with Gaussian processes". In: *Communications in Statistics-Simulation and Computation* 41.6, pp. 776–786.

Tegnér, Martin and Stephen Roberts (2019). "A probabilistic approach to nonparametric local volatility". In: *arXiv preprint arXiv:1901.06021*.

Wang, Xiaojing and James O Berger (2016). "Estimating shape constrained functions using Gaussian processes". In: *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification* 4.1, pp. 1–25.

Wang, Y, H Yin, and L Qi (2004). "No-arbitrage interpolation of the option price function and its reformulation". In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 120.3, pp. 627–649.