Théorie des Courbes à Courbure Totale Localement Bornée et ses Applications en Géométrie Discrète

28 juin 2021

La géométrie du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est étudiée depuis des millénaires. En revanche la géométrie sur les espaces discrets ne s'est développée que plus récemment. Celle-ci est motivée par le stockage d'images sur ordinateurs dont la position des pixels est décrite par des coordonnées entières.

La géométrie discrète diffère largement de la géométrie continue et de sa topologie «naturelle». En effet la topologie induite sur $\mathbb{Z}^2$ par la distance euclidienne est discrète (c'est-à-dire que tous les ensembles sont ouverts). Toutes les applications dont le domaine est discret sont continues, les seules applications continues dont l'ensemble d'arrivé est discret sont les applications constantes, en conséquences, les seules courbes d'un espace discret sont alors les singletons qui sont également les seules composantes connexes de l'espace discret. Toutes ces notions doivent alors être redéfinies pour pouvoir proposer une géométrie sur les espaces discrets analogue à celle des espaces continus.

La géométrie discrète a pour objectifs, en tenant compte des spécificités des espaces discrets, de répliquer, d'adapter les propriétés des espaces continus aux espaces discrets ou au contraire à tirer partie de ses différences afin de concevoir des algorithmes. En effet dans ce dernier cas, la transcription d'un problème du continu au discret peut permettre de rechercher les solutions d'un problème parmi un ensemble fini de possibilités dans l'espace discret plutôt que parmi un ensemble indénombrable de possibilités dans l'espace continu.

Par la suite nous ne nous intéresserons pas aux images numériques elles-mêmes mais aux formes représentées dans les images. Cette formes discrètes sont alors définies comme des sous-ensembles d'un espace discret, le plus souvent $h\mathbb{Z}^2$ où h est la longueur d'un côté d'un pixel. Une forme discrète n'est pas forcément le résultat d'une acquisition numérique binaire d'un objet réel mais peut aussi avoir été artificiellement générée. Cependant, dans les deux cas la forme discrète représente un objet continu S. C'est pourquoi nous supposerons par la suite que toute forme discrète résulte de la discrétisation $\mathrm{Dig}(S)$ d'un objet continu S. La transformation de l'objet continu en un objet discret est alors modélisée par un processus de discrétisation (par exemple la discrétisation de Gauss). Par la suite S sera un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ homéomorphe à un disque fermé.

Dans plusieurs domaines de l'imagerie, notamment dans la segmentation d'images, des modèles déformables sont employés. Ceux-ci consistent à définir une énergie composée d'un terme d'attache aux données (ressemblance à l'image) et d'un terme de régularisation de la forme (plus l'apparition d'un forme dans l'image est jugée improbable, plus la forme sera pénalisée dans le terme de régularisation). Les modèles déformables nécessitent souvent d'estimer des grandeurs géométriques (par exemple la longueur d'une courbe pour la fonctionnelle du Mumford-Shah). Nous nous intéressons alors au problème de l'estimation géométrique sur une forme discrète et au contrôle de la différence entre une caractéristique géométrique de S et son estimation sur $\mathrm{Dig}(S)$.

Cette erreur d'estimation varie en fonction de la résolution $\frac{1}{h}$ de l'image numérique. La *convergence multigrille* est souvent utilisée en géométrie comme critère d'évaluation des méthodes d'estimation indépendant du pas de la grille h. Elle consiste à s'assurer que l'erreur d'estimation tend vers 0 lorsque le pas de la grille h tend vers 0.

La convergence multigrille des estimateurs d'aire d'objets planaires est connue depuis longtemps. Nous nous intéressons alors à la convergence multigrille d'estimateur de quantités géométriques unidimensionnelles notamment du périmètre de S et d'intégrales curvilignes le long de ∂S.

Estimer des caractéristiques géométriques à partir d'un objet discret n'aurait pas de sens si celui-ci était la fusion de la discrétisation de plusieurs objets disjoints (et inversement si deux objets discrets disjoints étaient la discrétisation d'un seul objet continu). Il est alors nécessaire de s'assurer que la discrétisation traduise correctement certaines propriétés topologiques sur S. Les deux principaux critères de préservation de la topologie sont d'une part le fait que le bord de la discrétisation soit homéomorphe à un segment (on dit que l'objet est *bien composé*) et d'autre part le pendant discret de la connexité de S appelé *k-connexité* (avec $k = 4, 8$).

Pour que la discrétisation permette de reconstruire la topologie et la géométrie de l'objet continu S, il est nécessaire d'imposer certaines hypothèses à S . La complexité de la forme S doit être suffisamment faible par rapport à la quantité d'information contenue dans sa discrétisation $\mathrm{Dig}(S)$. Les hypothèses imposées à S doivent alors permettre de déterminer la taille de pixels h en-deçà de laquelle la discrétisation $\mathrm{Dig}(S)$ contient suffisamment d'informations ainsi qu'une majoration de l'erreur d'estimation. De plus, nous souhaitons que l'hypothèse sur S soit purement géométrique et ne tienne pas compte de la régularité de la paramétrisation du bord de S. En effet des contraintes de régularité exclueraient les polygones de la famille de formes recherchée alors qu'il existe pourtant des courbes C^∞ les approchant avec une précision arbitraire.

Notre objectif est de proposer des hypothèses sur les formes continues les plus générales possibles permettant de travailler dans un cadre unifié pour l'estimation de longueur et la préservation de la topologie.

Nous avons proposé deux nouvelles hypothèses (courbes à Courbure Totale Localement Bornée (CTLB) et à courbure totale lipschitzienne) sur les formes continues et les avons comparé aux différentes hypothèses développées dans le cadre de la géométrie discrète pour limiter la complexité des formes continues S. Enfin, après avoir étudié le comportement local des courbes CTLB, nous établirons certains liens entre ces notions.

Nous avons établi des résultats de reconstruction topologique pour différentes discrétisations d'une courbe CTLB.

Afin de permettre la comparaison le bord de la forme continue S et du bord de sa discrétisation, nous définissons une «rétro-discrétisation» permettant d'associer aux arcs discrets les arcs de ∂S. Cette rétrodiscrétisation permet par la suite de comparer la longueur de ∂S à celle de sa discrétisation.

Nous démontrons également la convergence multigrille de certains estimateurs de longueur et d'intégrales le long de ∂S.

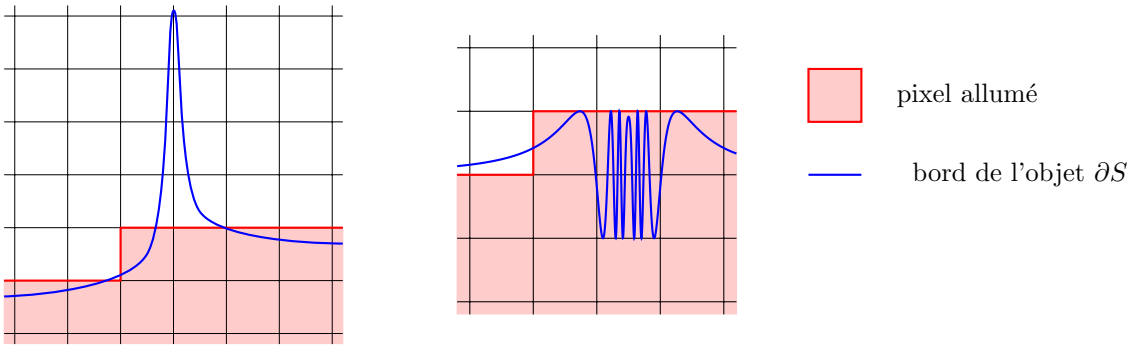

FIGURE 1 – A gauche, forme S dont le bord s'écarte arbitrairement loin de sa discrétisation. A droite forme S dont le bord oscille beaucoup autour de la discrétisation. Dans les deux cas la discrétisation $\mathrm{Dig}(S)$ n'est pas suffisamment précise par rapport à la complexité de ∂S pour pourvoir estimer la plupart des caractéristiques géométriques de S.

Journals

É. Le Quentrec, L. Mazo, É. Baudrier, M. Tajine *Local Turn-Boundedness, a curvature control for continuous curves with application to digitization*, Journal of Mathematical Imaging and Vision, Springer Verlag, page 673–692, Volume 62, may 2020

É. Le Quentrec, L. Mazo, É. Baudrier, M. Tajine *Monotonic sampling of a continuous closed curve with respect to its Gauss digitization. Application to length estimation.*, **soumis**

International conferences

É. Le Quentrec, L. Mazo, É. Baudrier, M. Tajine *Locally turn-bounded curves are quasi-regular*, International Conference on Discrete Geometry and Mathematical Morphology (DGMM), Uppsala, Sweden, may 2021

É. Le Quentrec, L. Mazo, É. Baudrier, M. Tajine *Local turn-boundedness : a curvature control for a good digitization*, Discrete Geometry for Computer Imagery. DGCI 2019, Marne-la-Vallée, France, Springer, Lecture Notes in Computer Science, march 2019