Autour des signes locaux de variétés abéliennes

Résumé de thèse

17 avril 2021

— **Candidat :** Lukas MELNINKAS

— **Directeurs de thèse :** Rutger NOOT, Adriano MARMORA.

1 Contexte et motivation

Soit $K/\mathbb{Q}_p$ une extension finie et soit A/K une variété abélienne définie sur K. On considère la représentation ρ_ℓ du Groupe de Galois absolu $\Gamma_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ sur la cohomologie ℓ-adique $H^1_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ pour un nombre premier $\ell \neq p$.

On note k_K le corps résiduel de K et $q_K = |k_K|$ son ordre. Le groupe de Weil de K est le sous-groupe $W_K \subset \Gamma_K$ des éléments dont l'image dans $\mathrm{Gal}(\overline{k}_K/k_K)$ est une puissance entière du Frobenius. On note $I_K \subset W_K$ le sous-groupe d'inertie. Le groupe de Weil–Deligne de K est le produit semi-direct $W_K \ltimes \mathbb{C}$ où l'action de W_K sur $\mathbb{C}$ est donné par le caractère cyclotomique. On peut naturellement associer une représentation complexe de Weil–Deligne à ρ_ℓ (dû à Grothendieck) qu'on notera ρ. Sa classe d'isomorphisme est indépendante de ℓ.

L'objectif principal de ma thèse est d'étudier le *signe local* $w(A/K) = \pm 1$ associé à ρ. Pour expliquer l'intérêt de ces invariants, considérons maintenant A/F une variété abélienne définie sur un corps de nombres F. Pour toute place v de F on considère la variété abélienne complétée A_v/F_v. On a $w(A_v/F_v) = 1$ pour toutes sauf un nombre fini de places v. Le *signe global* $w(A/F) = \prod_v w(A_v/F_v)$ est donc bien défini. Conjecturalement, $w(A/F)$ est le coefficient dans l'équation fonctionnelle de la fonction L globale associée à A/F. Par conséquent, le signe global détermine la parité du rang analytique de A. D'après la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, le rang analytique est égal au rang du groupe des points rationnels $A(F)$, appelé le rang de Mordell–Weil. En admettant les conjectures mentionnées, le signe global détermine la parité du rang de $A(F)$. Les calculs de signes locaux sont nécessaires pour déterminer le signe global.

On revient à la situation d'une variété abélienne A/K sur un corps p-adique K. D'après les travaux de Tate, Langlands, et Deligne, on sait que le signe local est l'unique nombre complexe satisfaisant certaines axiomes (qu'on ne précisera pas ici). On voudrait déterminer $w(A/K)$ en termes d'autres invariants de A/K.

2 Multiplication réelle

Les résultats présentés dans cette section font l'objet de l'article [Mel19] (soumis pour publication).

Soit A/K une variété abélienne de dimension g définie sur une extension finie $K/\mathbb{Q}_p$ avec $p \neq 2$. On s'inspire des méthodes développées par Rohrlich dans le cas de courbes elliptiques. Pour les généraliser on suppose que A/K a multiplication réelle, c'est-à-dire, qu'il existe un corps de nombres $F/\mathbb{Q}$ totalement réel de degrée g et un plongement d'anneaux $F \to \mathrm{End}_K(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Dans les énoncés qui suivent, $a(A/K)$ désigne le conducteur d'Artin de la représentation associée ρ_ℓ.

Théorème 1. *Supposons que A/K a multiplication réelle et que sa réduction est potentiellement bonne. Le groupe $\rho_\ell(I_K)$ est fini d'ordre ep^r avec $p \nmid e$.*

1. *Si $\rho_\ell(\Gamma_K)$ est commutatif, alors*

$$w(A/K) = (-1)^{\frac{g(q_K-1)}{e}};$$

2. *Si $\rho_\ell(\Gamma_K)$ est non-commutatif et $\rho_\ell(I_K)$ est commutatif, alors*

$$w(A/K) = (-1)^{\frac{a(A/K)}{2}+\frac{g(q_K+1)}{e}}.$$

Théorème 2. *Supposons que A/K a multiplication réelle et que sa réduction n'est pas potentiellement bonne. Alors A/K a réduction potentiellement torique et*

$$w(A/K) = \begin{cases} (-1)^g & \textit{si la réduction est torique et déployée;} \\ 1 & \textit{si la réduction est torique et non-déployée;} \\ (-1)^{g\frac{q_K-1}{2}} & \textit{si la réduction est additive.} \end{cases}$$

De plus, ces trois cas sont les seuls possibles.

Remarque. Les 3 cas ci-dessus généralisent les types de réduction classiques de courbes elliptiques. Le réduction torique signifie que la composante neutre du fibre spécial du modèle de Néron de A/K est un tore. La réduction additive signifie que cette composante neutre est $\mathbb{G}_a^g$.

3 Courbes elliptiques revisitées

Soit E/K une courbe elliptique de potentiellement bonne réduction. On suppose que $\rho_\ell(I_K)$ n'est pas abélien. Alors l'image du sous-groupe de ramification sauvage $I_K^{\mathrm{w}} \subset I_K$ par ρ_ℓ est non-trivial, d'où $p = 2$ ou $p = 3$ (d'après Serre–Tate). Dans le cas où $p = 3$ les signes locaux ont été déterminés par Kobayashi en termes d'une équation de Weierstrass particulière. Nous donnons une caractérisation du signe local plus géométrique.

On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. Soit $\mathcal{C}/\mathcal{O}_K$ le modèle minimal régulier de E/K. Notons $m(E/K)$ le nombre de composantes irréductibles de sa fibre spéciale géométrique. Soit $\mathcal{E}/\mathcal{O}_K$ le modèle de Néron et soit $\mathcal{E}^\circ$ sa composante neutre. Notons $c(E/K)$ le cardinal du quotient $\mathcal{E}(\mathcal{O}_K)/\mathcal{E}^\circ(\mathcal{O}_K)$, appelé le nombre de Tamagawa.

Théorème 3. *Soit $p = 3$, soit E/K une courbe elliptique de potentiellement bonne réduction pour laquelle $\rho_\ell(I_K)$ est non-commutatif. Soit $M = K(\sqrt{\Delta})$ pour un discriminant Δ de E/K. On note $\lfloor\cdot\rfloor$ la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$, v_3 la valuation 3-adique sur $\mathbb{Q}$, et $\left(\frac{-1}{k_K}\right) := (-1)^{\frac{q_K-1}{2}}$. Alors*

$$w(E/K) = (-1)^{v_3(c(E/M))} \cdot \left(\frac{-1}{k_K}\right)^{\frac{a(E/K)+m(E/K)}{2}+\lfloor\frac{m(E/K)+1}{6}\rfloor}.$$

Remarque. La condition que $\rho_\ell(I_K)$ est non-commutatif peut être remplacée par la condition équivalente que $a(E/K) \geqslant 3$ et la valuation $v_K(\Delta)$ est impaire.

4 Surfaces jacobiennes et la ramification maximale

Les résultats présentés dans cette section font l'objet de l'article [Mel21].

Soit C/K une courbe hyperelliptique de genre 2 sur K. On note J/K sa jacobienne. On suppose que J/K a potentiellement bonne réduction et que la représentation galoisienne associée ρ_ℓ est sauvagement ramifiée. Alors $p \leqslant 5$ et on suppose désormais que $p = 5$. Liu à montré que C/K a potentiellement bonne réduction. Liu a aussi donné un analogue pour l'algorithme de Tate : il existe une équation définissant C/K

$$Y^2 = X^5 + a_2X^4 + a_3X^3 + a_4X^2 + a_5X + a_6 \tag{1}$$

avec $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathcal{O}_K$ et $1 \leqslant v_K(a_6) \leqslant 9$, $v_K(a_6) \neq 5$. De plus, l'entier $v_K(a_6)$ détermine complètement le fibre spéciale géométrique $\mathscr{C}_{\overline{k}_K}$ du modèle minimal régulier de C/K en suivant la classification de Namikawa–Ueno. En particulier, $v_K(a_6)$ détermine le nombre $m(C/K)$ de composantes irréductibles de $\mathscr{C}_{\overline{k}_K}$.

L'image $\rho_\ell(I_K)$ est isomorphe à un sous-groupe de $C_5 \rtimes C_8$ (C_8 agit sur C_5 à travers du quotient $C_8 \to C_4$). La structure exacte de $\rho_\ell(I_K)$ dépend seulement de la valuation $v_K(\Delta)$ d'un discriminant Δ de C/K. On s'intéresse au cas où ce groupe est maximal, c'est-à-dire $\rho_\ell(I_K) \simeq C_5 \rtimes C_8$. C'est équivalent au cas où $v_K(\Delta)$ est impaire et au cas où le conducteur d'Artin $a(J/K)$ est impair.

Théorème 4. *Soit $p = 5$ et soit C/K une courbe hyperelliptique de genre 2. On suppose que ρ_ℓ est sauvagement ramifiée et que pour un discriminant Δ de C/K la valuation $v_K(\Delta)$ est impaire. On note $\left(\frac{\cdot}{k_K}\right)$ le symbole de Legendre et $(\cdot,\cdot)_K$ le symbole quadratique de Hilbert. Dans la notation de (1), le signe local est donné par*

$$w(C/K) = -(-1)^{[k_K:\mathbb{F}_5]} \cdot \left(\frac{m(C/K)+3}{k_K}\right) \cdot (\Delta, a_6)_K.$$

Pour la preuve on utilise une approche analogue à celle développée par Kobayashi pour traiter le cas de courbes elliptiques sur des corps 3-adiques. La

représentation de Weil ρ associée est induite par un caractère χ du W_H avec $H = K(\sqrt[4]{\Delta})$. On se ramène à déterminer le signe local $w(\chi)$. En utilisant la théorie explicite des corps de classes locaux on exprime $w(\chi)$ en termes d'une ψ-jauge explicite $c \in H^\times$ de χ. Plus précisément, on peut choisir c en fonction de l'équation (1). En identifiant χ avec un pseudo-caractère de $H^\times$, il reste à calculer $\chi(c)$. Pour le faire, on choisit une extension L/K particulière pour laquelle $C_L := C \times_K L$ a bonne réduction. On étudie la courbe $\mathscr{C}_{k_L}$, obtenue par la réduction de C_L, en utilisant la théorie d'Artin–Schreier. Ensuite, on peut déterminer $\mathrm{Tr}(\rho)$ en comptant les points sur $\mathscr{C}_{k_L}$, ce qui permet d'expliciter $\chi(c)$ et finaliser les calculs.

5 Lien avec des nombres de Tamagawa

Partant de la formule obtenue dans le Théorème 4, on voudrait remplacer le terme $(\Delta, a_6)_K$ par un terme plus géométrique. Cela est possible dans un cadre plus général. On se donne un nombre premier $p > 2$.

Théorème 5. *Soit C/K une courbe hyperelliptique de genre $g = \frac{p-1}{2}$ telle que ρ_ℓ est sauvagement ramifiée. Alors la jacobienne J/K a potentiellement bonne réduction et C/K est définie par une équation*

$$Y^2 = P(X) = X^p + \ldots + a_0 \tag{2}$$

avec $P \in \mathcal{O}_K[X]$ irréductible, $0 < v_K(a_0) < 2p$, et $p \nmid v_K(a_0)$.

On suppose que $v_K(\Delta)$ est impaire pour un discriminant Δ de C/K. Soit $M := K(\sqrt{\Delta})$ et soit $c(J/M)$ le nombre de Tamagawa de J/M. Alors

$$(\Delta, a_0)_K \cdot \left(\frac{-1}{k_K}\right)^{v_K(a_0)} = -(-1)^{v_p(c(J/M))}.$$

Références

[Mel19] L. Melninkas, *On the root numbers of abelian varieties with real multiplication*, 2019. arXiv : `1912.10263 [math.NT]`.

[Mel21] ——, *Root numbers of curves of genus 1 and 2 having maximal ramification*, 2021. arXiv : `2102.07745 [math.NT]`.