Sous-groupes normaux de type fini des groupes Kählériens

Francisco Nicolás Cardona

sous la direction de

Thomas Delzant et Pierre Py

Résumé

Dans cette thèse nous nous somme intéressés à l'étude des sous-groupes normaux de type fini des groupes Kählériens. Les groupes kählériens sont les groupes qu'on peut réaliser comme groupes fondamentaux d'une variété kählérienne compacte; leur étude mélange géométrie différentielle complexe et théorie des groupes. Il existe deux types de résultats dans l'étude de groupes Kählériens: il y a des résultats négatifs, qui disent que certains familles de groupes ne contiennent pas de groupes Kählériens et il y a des résultats positifs, qui donnent de nouveaux exemples de groupes Kählériens ayant des propriétés intéressantes. Dans cette thèse nous contribuerons à ces deux lignes de recherche. Plus précisément, nous aborderons les problèmes suivants:

• donner des restrictions sur les groupes Kählériens qui admettent comme sous-groupe normal un groupe de type fini muni d'une action sur un arbre.

• construire de nouveaux groupes Kählériens ayant des proprétés de finitude exotique qui se plongent comme sous-groupes normaux dans un groupe Kählérien précédemment connu.

Groupes Kählérien et groupes de type fini munis d'une action sur un arbre

Étant donné un groupe Kählérien avec un sous-groupe normal qui agit sur un arbre, on peut se demander si cette action peut s'étendre au groupe Kählérien. Cette partie de notre travail est centrée sur cette question. Dans un premier temps, on étudie cette questions en dehors du cadre des groupes Kählériens.

Un des outils principaux qui apparaissent dans cette étude est la Théorie de Bass-Serre. Étant donné un groupe de type fini G, cette théorie établit un dictionnaire entre les actions de G sur un arbre sans inversions dont l'action est transitive sur l'ensemble des arêtes et les décompositions de G comme un produit amalgamé ou une extension HNN. Parmi les groupes qui agissent sur un arbre auxquels on s'intéresse, on trouve les groupes fondamentaux des surfaces hyperboliques, appelés groupes de surface. Dans ce travail on rappelle la construction de l'arbre dual associé à une courbe fermée simple sur une surface hyperbolique.

Un résultat de Gromov et Schoen sur les groupes Kählériens agissant sur un arbre nous permet de démontrer que si un groupe normal d'un groupe Kählérien agit sur un arbre

de manière minimale, fidèle et sans points fixes au bord et en plus cette action s'étend au groupe Kählérien, alors le sous-groupe normal est un groupe de surface.

Le premier cas auquel on s'intéresse est celui des groupes Kählériens admettant un groupe de surface comme sous-groupe normal. Dans cette situation, on donne des restrictions pour que le groupe Kählérien se décompose (virtuellement) comme un produit direct dont un des facteurs est un groupe de surface. Ces restrictions sont données par l'action par conjugaison du groupe Kählérien sur le groupe de surface. Ce travail permet de donner une nouvelle preuve d'un résultat récent de Bregman and Zhang sur les extensions de Kähler des groupes Abéliens par un groupe de surface.

Dans la littérature il y a des travaux sur des groupes qui agissent sur un arbre de façon que leurs groupes des automorphismes agissent sur le même arbre de "manière compatible" avec l'action original. Notamment il y a le travail de Karras, Pietrowski et Solitar qui permet d'étudier le cas de certains produits libres, le travail de Gilbert, Howie, Metaftsis et Raptis sur certains groupes de Baumslag-Solitar et les travaux de Bowditch et Sela sur les groupes hyperboliques à un bout. En utilisant ces résultats et notre étude des groupes Kählériens, on démontre que les groupes suivants ne peuvent pas se plonger comme sous-groupes normaux dans un groupe Kählérien:

• Les groupes qui se scindent comme un produit libre $A * B$ non trivial, où A et B sont indécomposables, non cycliques infinis et non isomorphes entre eux.

• Les groupes de Baumslag-Solitar

$$\langle x, t | tx^p t^{-1} = x^q \rangle,$$

où p, q sont des entiers tels que $p, q > 1$ et aucun de deux n'est pas un multiple de l'autre.

• Les groupes hyperboliques à un bout sans torsion non isomorphes à un groupe de surface dont le groupe des automorphismes extérieurs est infini.

Groupes Kählériens ayant des propriétés de finitude exotique

Étant donné un groupe discret, on peut se demander s'il admet comme espace classifiant un CW-complexe fini ou alors ayant un r-squelette fini, pour un certain r. On dit qu'un groupe a une propriété de finitude exotique s'il ne satisfait pas l'une de ces conditions. Cette partie de notre travail est centrée sur la construction d'exemples de groupes Käleriens ayant des propriétés de finitude exotique.

Dimca, Papadima et Suciu ont construit de groupes Kählériens ayant des propriétés de finitude exotiques en utilisant de fonctions holomorphes qui vont dun produit direct d'un nombre fini de surfaces de Riemann vers une courbe elliptique. Les fonctions utilisées par Dimca, Papadima et Suciu sont un cas particulier des fonctions holomorphes à fibres connexes qui vont d'une variété complexe et compacte vers une surface de Riemann de genre positif. Dans cette thèse nous étudions ces fonctions, appelés *pinceaux irrationnels*, sous l'hypothèse que la source est asphérique et que les points critiques du pinceau sont isolés. En étudiant la topologie de l'espace classifiant du noyau du morphisme induit au niveau des groupes fondamentaux par un tel pinceau (en supposant qu'il y a au moins un

point critique), nous prouvons que l'homologie de ce noyau n'est pas de type fini, ce qui implique qu'il posséde une propriété de finitude exotique. Ceci généralise le résultat de Dimca, Papadima et Suciu.

Une construction similaire à celle de Dimca, Papadima et Suciu mais en utilisant le produit direct de la surface de Cartwright-Steger avec elle même un nombre fini de fois, nous permet de donner de nouveaux exemples de groupes Kählériens ayant des propriétés de finitude exotique grâce à notre étude des pinceaux irrationnels. Les groupes construits de cette façon se plongent naturellement comme sous-groupe normaux dans le produit direct du groupe fondamental de la surface de Cartwright-Steger avec lui même un nombre fini de fois. En plus, on démontre que ces groupes ne se plongent pas virtuellement dans un produit direct de groupes de surface, ce qui implique que les groupes que nous construisons sont d'une nature différente de celle des groupes construits par Dimca, Papadima and Suciu.

Finalement comme un travail d'exposition, on donne une preuve détaillée d'un résultat de Kapovich sur les pinceaux irrationnels des surfaces complexes asphériques (pas nécessairement avec points critiques isolés). Ce résultat établit qu'un tel pinceau n'a pas des points critiques ou le noyau du morphisme induit au niveau des groupes fondamentaux n'est pas de présentation finie. Ceci a été le premier résultat reliant l'existence des points critiques d'un pinceau irrationnel aux propriétés de finitude du noyau du morphisme induit au niveau des groupes fondamentaux.

Travaux

- Irrational pencils and Betti numbers
  Francisco Nicolás et Pierre Py,
  preprint 2020,
  arXiv:2006.09566,
  à apparaître sur les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.
- On finitely generated normal subgroups of Kähler groups
  Francisco Nicolás,
  preprint 2021,
  arXiv:2102.01128,
  sousmis.

Communications

- BAGS metting on Torelli Theorems,
  Nancy,
  avril 2020
  annulé à cause du coronavirus.
- Rencontre autour des espaces CAT(0),
  Maison du Kleebach, Münster
  mars 2020
  annulé à cause du coronavirus.

- Groupes de Kähler ayant des propriétés de finitude exotique,
  Séminaire Pampers,
  Rennes,
  décembre 2020.
- Groupes de Kähler ayant des propriétés de finitude exotique,
  Séminaire Géométrie et applications,
  Strasbourg,
  juillet 2020.
- Arbre dual associé à une courbe fermée simple sur une surface hyperbolique,
  Séminaire Doctorant,
  Strasbourg,
  octobre 2019.

Conférences suivies

- Young Geometric Group Theory IX,
  Saint-Jacut-de-la-Mer,
  fevrier 2020.
- Groups and Geometries,
  CIRM, Marseille
  janvier 2019.

Francisco Nicols Cardona,
https://irma.math.unistra.fr/~nicolas/
IRMA, University of Strasbourg, 67084 Strasbourg Cedex, France
E-mail address: fnicolascardona@math.unistra.fr