La transformée de Fourier-Mukai, introduite par Sigeru Mukai, est un outil très puissant permettant d'étudier les faisceaux quasi-cohérents sur une variété abélienne. Plus précisément, si on fixe A une variété abélienne sur un schéma S localement noethérien pour laquelle on notera m, ϵ et $\langle -1 \rangle$ respectivement la multiplication, l'élément neutre et l'inverse et T un S-schéma localement noethérien, on peut munir $A \times_S T$ d'une structure de variété abélienne sur T en étendant m, ϵ et $\langle -1 \rangle$. On dira alors qu'un $\mathcal{O}_{X \times T}$-faisceau inversible $\mathcal{L}$ vérifie le théorème du carré si

$$m_T^* \mathcal{L} \simeq p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L},$$

où $m_T, p_1, p_2 : (A \times_S T) \times_T (A \times_S T) \to A \times_S T$ sont respectivement la multiplication et les projections canoniques. On note $Pic^0(A \times_S T/T)$ le groupe abélien des faisceaux de $\mathcal{O}_{X \times T}$-modules inversibles satisfaisant le théorème du carré. On a alors le théorème suivant

Théorème. *Le foncteur $Pic^0(A \times \bullet/\bullet) : T \mapsto Pic^0(A \times_S T/T)$ de la catégorie des S-schémas localement noethériens dans la catégorie des groupes abéliens est représentable par un S-schéma abélien de même dimension que A.*

On note $A^\vee$ ce schéma abélien, qui sera appelé variété abélienne duale. La représentabilité du foncteur $Pic^0(A \times \bullet/\bullet)$ donne un élément universel $\mathcal{P}$ de $Pic^0(A \times A^\vee/A^\vee)$, correspondant à $id_{A^\vee} \in Hom(A^\vee, A^\vee)$. $\mathcal{P}$ est donc un $\mathcal{O}_{A \times A^\vee}$-module inversible vérifiant le théorème du carré pour la $A^\vee$-variété abélienne $A \times A^\vee$, qui est appelé faisceau de Poincaré. On pose les notations suivantes :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{P} \arrow[d, dash] & \\ A & A \times A^\vee \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "p^\vee"] & A^\vee \end{tikzcd}$$

Définition. *On définit la transformée de Fourier-Mukai $\mathcal{F} : D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{A^\vee}) \to D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_A)$ en posant*

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}^\cdot) = Rp^\vee_*(\mathcal{P} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} p^* \mathcal{E}^\cdot).$$

On définit de même la transformée de Fourier-Mukai duale $\mathcal{F}^\vee : D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{A^\vee}) \to D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_A)$ en posant

$$\mathcal{F}^\vee(\mathcal{E}^\cdot) = Rp_*(\mathcal{P} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} p^{\vee *} \mathcal{E}^\cdot).$$

Les propriétés les plus importantes de la transformée de Fourier-Mukai sont les suivantes

Théorème (Mukai). *1. Si $\mathcal{E}^\cdot \in D^b_{coh}(\mathcal{O}_A)$, $\mathcal{F}(\mathcal{E}^\cdot) \in D^b_{coh}(\mathcal{O}_{A^\vee})$.*

2. $\mathcal{F} : D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_A) \to D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{A^\vee})$ réalise une équivalence de catégories.

3. $\mathcal{F}$ est involutive, dans le sens où $\mathcal{F}^\vee \circ \mathcal{F} \simeq \langle -1 \rangle^* \bullet [-dim(A)]$ et $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^\vee \simeq \langle -1 \rangle^{\vee *} \bullet [-dim(A)]$.

L'objectif des travaux exposés ici est d'étendre la définition de la transformée de Fourier-Mukai, définie sur les $\mathcal{O}$-modules sur une variété abélienne classique, pour en faire un foncteur sur les $\mathcal{D}$-modules sur une variété abélienne formelle $\mathcal{A}$. La principale motivation de l'obtension d'une telle transformation est que la catégorie des $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{A}}$-modules cohérents ne dépend que de la fibre spéciale, donc de la variété abélienne sur k, qui est sous-jacente. D'autre part, toute variété abélienne sur un corps fini se relève en une variété abélienne formelle sur l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$.
L'objectif est donc de construire un analogue au foncteur Pic^0 qui puisse inclure des informations sur les structures de $\mathcal{D}$-modules des faisceaux et qui puisse être représentable, ce qui donnera un analogue à la variété duale et au faisceau de Poincaré. On pourra alors construire une transformée de Fourier-Mukai à l'aide de ces objets. Il faudra ensuite s'assurer que cette transformée vérifie les propriétés fondamentales attendues d'une transformée de Fourier-Mukai.

Pour réussir à étendre la transformée de Fourier-Mukai aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, on va d'abord comprendre comment l'étendre aux $\mathcal{O}$-modules sur une variété formelle, puis aux $\mathcal{D}$-modules sur une variété classique au-dessus d'un corps de caractéristique nulle, avant d'adapter les outils utilisés pour construire une transformée de Fourier-Mukai pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques.

Dans un premier temps, on donnera une méthode pour étendre la transformée de Fourier-Mukai en un foncteur sur les $\mathcal{O}$-modules sur une variété formelle. Pour ce faire, la première chose à prendre en compte sera la construction des faisceaux quasi-cohérents sur un schéma formel.
Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel, limite du système inductif $(X_i)_i$.

Définition. *On définit $D^-_{qcoh}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ comme étant la sous-catégorie de $D^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ dont les objets $\mathcal{E}^{\cdot}$ vérifient*

- $\mathcal{E}^{\cdot}_0 \in D^-_{qcoh}(X_0)$.
- $\mathcal{E}^{\cdot} = R\varprojlim_i \left(\mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{E}^{\cdot}\right)$.

On peut voir les fasiceaux quasi-cohérents sur $\mathcal{X}$ comme des faisceaux dont les restrictions sur chaque X_i sont compatibles entre elles en plus d'être quasi-cohérentes.

Théorème (Berthelot)**.** *Le foncteur $R\varprojlim$ réalise une équivalence de catégorie entre la catégorie $D^-_{qcoh}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ et la sous-catégorie pleine de la catégorie $D^-(\mathcal{O}_{X_\cdot})$ formée des complexes de systèmes projectifs $(\mathcal{E}^{\cdot}_i)_i$ tels que :*

- *Le complexe $\mathcal{E}^{\cdot}_0$ appartient à $D^-_{qcoh}(X_0)$.*
- *Pour tout entier i le morphisme canonique*

$$\mathcal{O}_{X_i} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \mathcal{E}^{\cdot}_{i+1} \to \mathcal{E}^{\cdot}_i$$

  est un isomorphisme.

La définition des faisceaux quasi-cohérents sur $\mathcal{X}$ est alors plus rigide que celle naïve qui consisterait à prendre la limite projective d'une famille de faisceaux quasi-cohérents, ce faisant il n'est pas clair que les constructions usuelles des foncteurs classiques comme le produit tensoriel, l'image inverse et l'image directe par un morphisme possèdent de bonnes propriétés. En fait, on montrera que le foncteur $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} f^{-1}\bullet$ ne préserve pas la quasi-cohérence sur les schémas formels.
Ce faisant on va plutôt définir les foncteurs produit tensoriel, image inverse et image directe formels comme la limite projective des mêmes foncteurs sur les X_i.

Définition. *Soient $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $\mathcal{E}^{\cdot}, \mathcal{F}^{\cdot} \in D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ et $\mathcal{G}^{\cdot} \in D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$. On pose*

$$\mathcal{E}^{\cdot} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{F}^{\cdot} = R\varprojlim_i (\mathcal{E}^{\cdot}_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{F}^{\cdot}_i),$$

$$f^{\flat}\mathcal{E} = R\varprojlim_i f_i^* \mathcal{E}^{\cdot}_i$$

et

$$f_+\mathcal{G} = R\varprojlim_i f_{i*}\mathcal{G}^{\cdot}_i.$$

Ce sont les mêmes définitions que celles de Berthelot, adaptées au cas des $\mathcal{O}$-modules. Ainsi, par construction, ces foncteurs sont compatibles aux réductions sur les X_i et préservent donc la quasi-cohérence. On pourra alors construire les transformée de Fourier-Mukai $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{\vee}$ sur $\mathcal{A}$ une variété abélienne formelle et $\mathcal{A}^{\vee}$, sa variété abélienne duale. Comme tous les foncteurs utilisés pour les construire seront compatible aux réductions sur les A_i, on en déduira le résultat suivant.

Propriété.

$$\mathcal{F} \simeq R\varprojlim_i \mathcal{F}_i \text{ et } \mathcal{F}^\vee \simeq R\varprojlim_i \mathcal{F}_i^\vee.$$

Ce résultat permet de transporter les propriétés importantes des transformées de Fourier-Mukai depuis le monde des variétés classiques vers le monde des variétés formelles.
On pourra ensuite se servir de ces résultats pour construire une transformée de Fourier-Mukai sur une variété analytique rigide avec bonne réduction.

Dans le second chapitre, on construira une transformée de Fourier-Mukai pour les $\mathcal{D}$-modules sur une variété sur le spectre d'un corps de caractéristique nulle. Cette construction se trouve dans une prépublication de Laumon, cependant elle manque de détails.
L'idée générale est, pour une variété abélienne A sur S localement noethérien de caractéristique nulle, de considérer les faisceaux de $\mathcal{D}_A$-modules $\mathcal{O}_A$-inversibles qui vérifient le théorème du carré. On note $Pic^\natural(A/S)$ le groupe abélien dont les éléments sont ces faisceaux. De même, pour T un S-schéma localement noethérien, on peut construire la T-variété abélienne $A \times T$ et regarder le groupe $Pic^\natural(A \times T/T)$ des faisceaux $\mathcal{D}_{A\times T/T}$-modules $\mathcal{O}_{A\times T}$-inversibles qui vérifient le théorème du carré. Attention : il est important de voir qu'il s'agit de $\mathcal{D}_{A\times T/T}$-modules et non pas de $\mathcal{D}_{A\times T/S}$-modules ! Cela vient du fait qu'on regarde $A \times T$ comme une T-variété et non pas une S-variété, et c'est ce détail qui va compliquer le travail d'extension de la transformée de Fourier-Mukai aux $\mathcal{D}$-modules.

Théorème (Mazur-Messing)**.** *Le foncteur $Pic^\natural(A \times \bullet/\bullet) : T \mapsto Pic^\natural(A \times T/T)$ est représentable par un S-schéma en groupes abélien lisse de dimension $2dim(A)$.*

On notera ce schéma $A^\natural$. De même que dans le cas des $\mathcal{O}$-modules, la représentabilité de $Pic^\natural(A\times \bullet/\bullet)$ donne un objet canonique $\mathcal{P}$ de $Pic^\natural(A \times A^\natural/A^\natural)$ associé à $id_{A^\natural}$, qu'on appellera encore faisceau de Poincaré. Il est cependant important de remarquer que $\mathcal{P}$ est un $\mathcal{D}_{A\times A^\natural/A^\natural}$-module, ainsi la transformée de Fourier-Mukai d'un $\mathcal{D}_A$-module ne pourra être qu'un $\mathcal{O}_{A^\natural}$-module.
Le caractère relatif à $A^\natural$ de $\mathcal{P}$ nous force à travailler avec des dérivations relatives à $A^\natural$, ce qui soulève plusieurs questions d'ordre pratique, à commencer par : Comment on construit le $\mathcal{D}_{A\times A^\natural/A^\natural}$-module image inverse d'un $\mathcal{D}_{A/S}$-module par une projection ? Et réciproquement pour construire l'image directe d'un $\mathcal{D}_{A\times A^\natural/A^\natural}$-module. On va donc introduire des foncteurs image inverse et image directe relatifs. Plus précisément, si $f = id_X \times g : X \times Y \to X \times Z$ est un morphisme de variétés, on va construire des foncteurs

$$f^{!(Y,Z)} : D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_{X\times Z/Z}) \to D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_{X\times Y/Y})$$

et

$$f_+^{(Y,Z)} : D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_{X\times Y/Y}) \to D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_{X\times Z/Z}).$$

Ces foncteurs seront en réalité très proches des foncteurs sur les $\mathcal{O}$-modules.

Propriété. *On a les isomorphismes de $\mathcal{O}$-modules suivants :*

$$f^{!(Y,Z)}(\mathcal{E}^\cdot) \simeq Lf^*(\mathcal{E}^\cdot)$$

et

$$f_+^{(Y,Z)}(\mathcal{F}^\cdot) \simeq Rf_*(\mathcal{F}^\cdot).$$

Les foncteurs relatifs vont aussi vérifier de nombreux résultats classiques comme la formule de la projection, le théorème du changement de base ou encore le principe de la bascule, en plus d'être compatibles aux foncteurs classiques sur les $\mathcal{D}$-modules.
Munis de ces constructions sur les $\mathcal{D}$-modules relatifs, on pourra alors construire la transformée de Fourier-Mukai pour les $\mathcal{D}$-modules.

Définition. *On définit la transformée de Fourier-Mukai sur les $\mathcal{D}_A$-modules comme le foncteur $\mathcal{F} : D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_A) \to D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{A^\natural})$ donné par*

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}^\cdot) = p^\natural_{+/A^\natural}(\mathcal{P} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A\times A^\natural}} p^{!(A^\natural)}\mathcal{E}^\cdot).$$

De même, on définit sa transformée $\mathcal{D}$-duale comme le foncteur $\mathcal{F}^\natural : D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{A^\natural}) \to D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_A)$ donné par

$$\mathcal{F}^\natural(\mathcal{E}^\cdot) = p^{(A^\natural)}_+(\mathcal{P} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A\times A^\natural}} p^{\natural *}\mathcal{E}^\cdot).$$

On montre que ces transformées vérifient bien les propriétés attendues, en particulier qu'elles réalisent une équivalence de catégorie entre $D^b_{qcoh}(\mathcal{D}_A)$ et $D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{A^\natural})$.

Enfin, la troisième partie de ce travail consiste à utiliser les outils des deux chapitres précédents pour obtenir une transformée de Fourier-Mukai pour les $\mathcal{D}$-modules sur une variété formelle $\mathcal{A}$.
On considère V un anneau à valuation discrète d'uniformisante π, V_i sa réduction modulo π^i, (A_i) un système inductif de variétés abéliennes sur les V_i et $\mathcal{A}$ leur limite.
Si la quasi-totalité des constructions du chapitre 2 n'utilisent pas l'hypothèse sur la caractéristique nulle de la base S et peuvent donc être faites sur les A_i, ce n'est pas le cas de la preuve de l'involutivité de la transformée de Fourier-Mukai, qui utilise de façon cruciale le théorème de Kashiwara et l'acyclicité du complexe de Koszul. Ainsi, il est fort peu probable que la transformée de Fourier-Mukai sur A_i soit involutive, malgré le fait qu'on puisse la construire. C'est pourquoi il faut considérer la transformée de Fourier-Mukai sur le schéma formel $\mathcal{A}$. De même, la construction du foncteur $Pic^\natural$ est intimement liée aux modules à connexion intégrable, qui dans le cadre arithmétique correspondent aux $\mathcal{D}^{(0)}$-modules, c'est pourquoi on restreindra la construction aux $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{A}}$-modules.
Pour pouvoir définir la transformée de Fourier-Mukai sur les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{A}}$-modules on va utiliser le même genre d'astuce que dans le premier chapitre, à savoir construire les foncteurs sur les variétés abéliennes formelles comme limite projective de ceux sur les réductions modulo π^i. Ces constructions ont déjà été faites par Berthelot pour les foncteurs classiques, mais on aura aussi besoin des foncteurs relatifs. On constatera aussi que la quasi-totalité des résultats qu'on a évoqué sur les foncteurs relatifs sur une variété classique vont s'étendre au cas des schémas formels. Une fois tous les résultats nécessaires obtenus, on peut définir la transformée de Fourier-Mukai sur les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{A}}$-modules.

Définition. *On définit la transformée de Fourier-Mukai pour les $\hat{\mathcal{D}}^{(0)}$-modules comme le foncteur $\mathcal{F} : D^b_{qcoh}(\hat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}) \to D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\natural})$ par*

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}^\cdot) = p^\natural_{+/\mathcal{A}^\natural}(\mathcal{P} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}\times\mathcal{A}^\natural}} p^{!(\mathcal{A}^\natural)}\mathcal{E}^\cdot).$$

On définit aussi la transformée de Fourier-Mukai $\mathcal{D}$-duale $\mathcal{F}^\natural : D^b_{qcoh}(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\natural}) \to D^b_{qcoh}(\hat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{A}/\mathcal{S}})$ par

$$\mathcal{F}^\natural(\mathcal{E}^\cdot) = p^{(\mathcal{A}^\natural)}_+(\mathcal{P} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}\times\mathcal{A}^\natural}} p^{\natural *}\mathcal{E}^\cdot).$$

Les travaux présentés dans ce manuscrit ne sont malheureusement pas assez avancés pour montrer que cette transformée de Fourier-Mukai est involutive, cependant on peut prouver une des deux formules d'involutivité, qui conduit au résultat final.

Théorème. *1. $\mathcal{F}$ est essentiellement surjective*

2. $\mathcal{F}^\natural$ est fidèle.