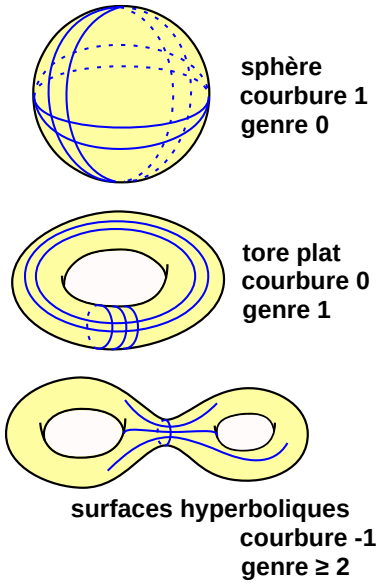
Géométrie et spectre des surfaces hyperboliques aléatoires

Introduction

La géométrie spectrale s'intéresse à l'étude des *valeurs propres*, ou *spectre*, d'une surface. Celles-ci sont définies comme étant la suite $(\lambda_j)_j$ des nombres réels λ tels que l'équation différentielle $\Delta f + \lambda f = 0$ admet une solution non nulle. Si l'on imagine que notre surface est un tambour avec une peau très fine, elles correspondent aux notes qui peuvent être produites par ce tambour. Elles interviennent également en mécanique quantique, en tant que niveaux d'énergie du système, et sont liées à des quantités géométriques de la surface, comme son aire.



Sur la figure ci-contre sont représentées quelques surfaces de courbure constante, de différents genres (nombre de « trous »), ainsi que les géodésiques sur ces surfaces (qui y sont l'équivalent des « droites »).

Mes recherches portent sur les *surfaces hyperboliques*, celles de courbure égale à -1. C'est une famille particulièrement riche d'exemples : pour tout genre $g \geq 2$, il existe un très grand nombre de surfaces hyperboliques de genre g, mais pas de surfaces de courbure 0 ou +1. Le spectre de ces surfaces est lié à de profondes questions de théorie des nombres et de dynamique chaotique. Sa connaissance est équivalente à celle du *spectre des longueurs*, la liste des longueurs des géodésiques fermées sur le surface (comme la géodésique au centre de la surface de genre 2 ci-contre).

Toutes ces motivations ont fait de la théorie spectrale des surfaces hyperboliques un domaine très actif à la deuxième moitié du 20ème siècle – une période qui s'achève par la publication de l'ouvrage de référence de Buser en 1992 (2). Il reste beaucoup de questions ouvertes, mais elles se heurtent à une difficulté : parmi toutes les surfaces hyperboliques, il y a des surfaces très *symétriques* (les surfaces arithmétiques), et des surfaces *dégénérées* (obtenues en « pinçant » une ou plusieurs géodésique(s)). Si l'on souhaite démontrer des théorèmes vrais pour *toutes les surfaces*, il faut que ces surfaces *atypiques* les vérifient, et cela limite beaucoup les possibilités. Face à cette problématique, il est tentant de montrer des théorèmes vrais pour la *plupart* des surfaces, cette approche ayant fait ses preuves en théorie spectrale des graphes, un domaine cousin. C'est le but de mes recherches : je cherche à décrire le spectre des surfaces hyperboliques *typiques*.

Méthodologie

Le choix méthodologique le plus important de ce projet est la définition de *surface typique*. Considérons l'ensemble des surfaces hyperboliques de genre g, à isométries près. Cet espace est muni d'une *structure symplectique*, la forme de Weil-Petersson, qui induit un volume fini, que l'on peut renormaliser pour obtenir une *mesure de probabilité*, la probabilité de Weil-Petersson. Nous dirons qu'un événement est typique si la limite de sa probabilité est 1 quand le genre g tend vers l'infini. La limite de grand genre correspond à prendre des surfaces de topologie de plus en plus riche, mais aussi d'aire de plus en plus grande, car l'aire d'une surface de genre g est $4\pi(g-1)$.

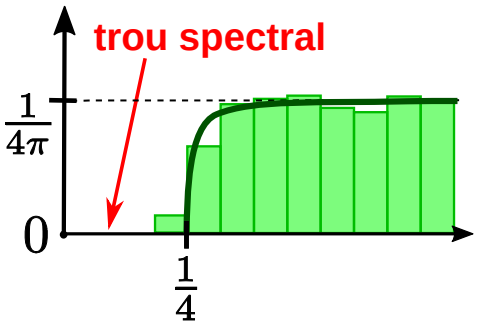
Mirzakhani a proposé en 2013 dans un article célèbre [Mirzakhani13] une méthode permettant d'étudier la géométrie de ces surfaces typiques, à l'aide de sa *formule d'intégration*. Elle détermine ainsi les valeurs de plusieurs quantités géométriques pour les surfaces typiques (rayon d'injectivité, diamètre, constante de Cheeger), et en déduit le premier résultat sur le spectre des surfaces typiques : la première valeur propre λ_1 est plus grande que 0.001.

Nous suivons la même méthode que celle proposée par Mirzakhani :

- utiliser la formule d'intégration de Mirzakhani pour obtenir des informations géométriques sur les surfaces typiques
- en déduire des informations spectrales à l'aide des liens entre géométrie et spectre des surfaces hyperboliques, comme la formule des traces de Selberg.

Résultats

Dans un premier article [2], j'ai montré que la densité spectrale d'une surface typique converge vers la densité spectrale du plan hyperbolique H, la courbe représentée sur la figure ci-contre. On peut en déduire des bornes supérieures sur le nombres de valeurs propres N(b) dans le segment [0,b] – qui sont meilleures dans le cas où b<1/4 car la densité spectrale sur H est supportée sur l'intervalle [1/4,+∞[. Ces bornes, et leur comparaison avec la littérature dans le cas déterministe, sont résumées dans les premières colonnes du tableau ci-dessous.



Spectre d'une surface typique

Quantité	**N(b), b < 1/4**	**N(1/4)**	**N(b), b > 1/4**	**Trou spectral λ_1**
Borne déterministe	≤ 2g - 2 [Otal--Rosas09] la borne est optimale		ne peut être borné par f(g,b)	arbitrairement petit
Borne probabiliste	amélioration d'un facteur g^{-a} [2]	amélioration d'un facteur $\log(g)^{-a}$ [2]	≤ C g b [2]	> 0.001 [Mirzkhani13] > 3/16– ε [Wu--Xue21] > 1/4– ε ?(en cours)

Le résultat principal de [2] implique aussi une version uniforme de la loi de Weyl et des bornes sur la multiplicités des valeurs propres meilleures que les bornes déterministes.

Mon projet suivant, en collaboration avec ma directrice Nalini Anantharaman, consiste à prouver que le trou spectral λ_1 est typiquement plus grand que 1/4 – ε. C'est un problème très ambitieux : début 2021, deux équipes indépendantes en Chine (Wu et Xue) et aux États-Unis (Lipnowski et Wright) ont démontré que λ_1 est typiquement plus grand que 3/16 – ε. Le même résultat a été démontré en 2020 dans un autre modèle probabiliste par Magee, Naud et Puder. Nous avons pour le moment obtenu des résultats partiels en géométrie et en théorie des surfaces aléatoires, et élaboré un plan d'action détaillé.

D'une part, j'ai montré avec le doctorant Joe Thomas dans [3] que les surfaces hyperboliques sont typiquement *non-emmêlées* (tangle-free). Ceci implique que les

géodésiques fermées plus petites que a log(g), a < 1, sont *simples* (elles ne s'auto-intersectent pas).

D'autre part, Nalini Anantharaman et moi-même avons calculé dans [1] un développement asymptotique des volumes de Weil-Petersson – une étape clé pour arriver à la précision 1/4 - ε.

Perspectives

Mise à part la suite de mon projet en collaboration avec Nalini Anantharaman, je souhaite étudier les multiplicités dans le spectre des longueurs à la lumière des découvertes de [3], qui implique le le spectre des longueurs est simple jusqu'à une échelle log(g). Je prévois également de travailler avec Jens Marklof sur les statistiques plus précises du spectre, comme les corrélations.

Liste de publications

[1] Nalini Anantharaman et Laura Monk. A high-genus asymptotic expansion of Weil-Petersson volume polynomials. *arXiv:2011.14889*, 2020.

[2] Laura Monk. Benjamini-Schramm convergence and spectrum of random hyperbolic surfaces of high genus. *Analysis & PDE (sous presse)*, 2021.

[3] Laura Monk et Joe Thomas. The tangle-free hypothesis on random hyperbolic surfaces. *International Mathematics Research Notices (sous presse)*, 2021.

Liste des communications

- Conférences internationales :
  - 03/21 : Mini-conférence « Young researchers in spectral geometry II »
  - 12/20 : Conférence « Jeunes géomètres dynamiques »
  - 10/20 : Séminaire international « Billards and Surfaces à la Teichmüller and Riemann Online »
  - 11/19 : 8e rencontre Strasbourg-Zurich « Frontiers in Analysis and Probability »
  - 05/19 : Workshop « Spectral theory and Probability in mathematical physics »
  - 04/19 : Workshop « Dynamics of geodesic flows and applications to PDEs »
- Séminaires :
  - 2021 : Systèmes dynamiques et théorie ergodique, Zurich (Suisse).
    Géométrie et topologie, Toulouse.
  - 2020 : Analyse, Cardiff (Royaume-Uni).
    Geométrie, Leeds (Royaume-Uni).
    Systèmes dynamiques, Brêmes-Oldenbourg (Allemagne).
    Géométrie différentielle, Bonn (Allemagne).
    Probabilités, Orsay.
    Analyse géométrique, séminaire en ligne de Frédéic Naud.
  - 2019 : Théorie spectrale et géométrie, Grenoble.
  - 2018 : Analyse, Strasbourg.